

# ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ

Φύλλο 8<sup>ο</sup> Μάιος 45<sup>2</sup>

## Παράδοξα στα Μαθηματικά

Ο όρος παράδοξο προέρχεται από το «παρά» (αντίθετα) και «δόξα» (γνώμη). Τα παράδοξα των μαθηματικών αποτελούν ανέκαθεν πεδίο ενδιαφέροντος καθώς εξερευνώντας απλά ερωτήματα οδηγούμαστε σε **λογικές αντιφάσεις**. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν το παράδοξο του **Russel**, το πρόβλημα του **Monty Hall** καθώς και το παράδοξο του **Hilbert**.

### Το παράδοξο του Russel



Για να αντιληφθούμε το παράδοξο του Russel, σκεπτόμαστε το ακόλουθο παράδειγμα: Έστω ότι χωρίζουμε όλα τα βιβλία του κόσμου σε δύο ξένα σύνολα, τα **αυτοαναφορικά** και τα μη-αυτοαναφορικά. Αυτοαναφορικά ονομάζονται τα βιβλία τα οποία περιέχουν τον τίτλο τους στο περιεχόμενό τους, ενώ μη-αυτοαναφορικά αυτά που δεν τον περιέχουν. Έστω, λοιπόν, ότι δημιουργούμε ένα νέο βιβλίο, με τίτλο X, το οποίο αποτελεί μία λίστα με τους τίτλους όλων των μη-αυτοαναφορικών βιβλίων. Εδώ προκύπτει το εξής ερώτημα: Το βιβλίο X θα περιέχεται μέσα σε αυτή τη λίστα;

Περίπτωση 1: Έστω ότι το βιβλίο X περιέχει τον τίτλο του στο περιεχόμενό του. Οπότε, σύμφωνα με τον ορισμό, το X είναι αυτοαναφορικό. Όμως, η λίστα περιέχει μόνο μη-αυτοαναφορικά βιβλία. Άρα το X δεν θα έπρεπε να περιέχεται στη λίστα. Αντίφαση!

Περίπτωση 2: Έστω ότι το βιβλίο X δεν περιέχει τον τίτλο του στο περιεχόμενό του. Οπότε, σύμφωνα με τον ορισμό, το X είναι μη-αυτοαναφορικό. Όμως, η λίστα περιέχει όλα τα μη-αυτοαναφορικά βιβλία. Άρα το X θα έπρεπε να περιλαμβάνεται στη λίστα. Αντίφαση και πάλι!

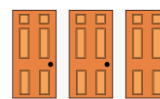
Ως εκ τούτου, το βιβλίο X ανήκει στη λίστα αν και μόνο αν δεν ανήκει στη λίστα, που είναι **άτοπο!**

Το παράδοξο του Russel στη **Θεωρία Συνόλων** μας επιβεβαιώνει πως **δε μπορούμε να ορίσουμε το σύνολο όλων των συνόλων!**

Παπαδημητρίου Ερμής, Στραπατσάκης Ιάσων

### Το πρόβλημα του Monty Hall

Βρίσκεσαι σε ένα τηλεοπτικό παιχνίδι και μπροστά σου βρίσκονται τρεις κλειστές πόρτες.



Πίσω από μία υπάρχει ένα αυτοκίνητο και πίσω από τις άλλες δύο, κατσίκες. Ο παρουσιαστής σου ζητά να διαλέξεις μία πόρτα. Στη συνέχεια ανοίγει μία από τις άλλες δύο πόρτες, αποκαλύπτοντας μια κατσίκα και σου δίνει την επιλογή να μείνεις στην αρχική σου επιλογή ή να αλλάξεις πόρτα. **Τι επιλέγεις;** Αν μείνεις στην αρχική πόρτα, έχεις 33,3% πιθανότητα να κερδίσεις. Αν αλλάξεις, η πιθανότητά σου ανεβαίνει στο 66,7%. Αυτό συμβαίνει καθώς στην αρχή, είχες 1/3 (33,3%) πιθανότητα να επιλέξεις τη σωστή. Άρα, η πιθανότητα το αυτοκίνητο να είναι σε μία από τις άλλες δύο πόρτες είναι 2/3 (66,7%) αφού ο παρουσιαστής γνωρίζει πού είναι η κατσίκα και δεν ανοίγει την πόρτα στην τύχη! **Όταν αφαιρείται η λάθος πόρτα, αυτόματα η πιθανότητα μεταφέρεται στη μία πόρτα που απομένει.**

Καυχής Ιάσωνας, Κανάτας Ιωάννης,  
Καραγιάννης Κωνσταντίνος

### Το παράδοξο του Hilbert

Από την αρχαιότητα, φιλόσοφοι και μαθηματικοί γοητεύονταν από την **έννοια του απείρου** καθώς φαίνεται να υπερβαίνει τα όρια της ανθρώπινης κατανόησης, δημιουργώντας παράδοξα που αμφισβητούν τη λογική μας.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα ξενοδοχείο με **άπειρα δωμάτια** το οποίο είναι μια νύχτα γεμάτο. Έτσι, όταν καταφθάνει ένα καινούργιος επισκέπτης, φαίνεται απίθανο να βρεθεί ένα ελεύθερο δωμάτιο. Ωστόσο, ο υπεύθυνος του ξενοδοχείου αξιοποιώντας την έννοια του άπειρου βρίσκει την λύση. Αν και **δεν υπάρχει “τελευταίο” δωμάτιο** για να εξυπηρετηθεί ο επισκέπτης, **υπάρχει πάντα ένα “επόμενο” δωμάτιο**. Έτσι, ο κάθε πελάτης που βρίσκεται στο δωμάτιο **n** μετακινείται στο δωμάτιο **n+1**, με αποτέλεσμα να μείνει ελεύθερο το πρώτο δωμάτιο. Με την εφαρμογή αυτής της μεθόδου, είναι δυνατό να εξυπηρετηθεί οποιοσδήποτε πεπερασμένος αριθμός πελατών.

Τι θα συμβεί όμως αν έρθει ένα άπειρο πλήθος πελατών; Για να επιλύσει αυτό το νέο πρόβλημα, ο υπεύθυνος του ξενοδοχείου αξιοποιεί το γεγονός ότι **υπάρχουν άπειροι περιττοί και άρτιοι αριθμοί**. Αρχικά, μετακινεί κάθε πελάτη στο δωμάτιο με διπλάσιο αριθμό από αυτόν που βρισκόταν. Δηλαδή, ο πελάτης που μένει στο δωμάτιο 1, πηγαίνει στο δωμάτιο 2, αυτός που μένει στο δωμάτιο 2 πηγαίνει στο δωμάτιο 4 κ.τ.λ. Με αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνει να αδειάσει κάθε δωμάτιο με περιττό αριθμό. Τότε **μένει κενό ένα άπειρο πλήθος περιττών δωματίων** που αρκεί για να εξυπηρετηθεί το άπειρο πλήθος των πελατών που αναμένουν!

Μισθός Αλέξανδρος, Παπαδημητρίου Βασίλης,  
Πολύδωρος Κωνσταντίνος,

# Το μυστήριο του Απείρου

Το άπειρο, ένα από τα πιο φλέγοντα επιστημονικά ζητήματα που ταλανίζει τη φιλοσοφία και τα μαθηματικά εδώ και χιλιετίες, δεν είναι απλώς μια αόριστη και αφηρημένη έννοια, αλλά κάτι ουσιαστικά πολύπλοκο. Η σύγχρονη θεωρία συνόλων, εμπνευσμένη από τον Georg Cantor, εξετάζει πρώτη το ενδεχόμενο ύπαρξης περισσότερων από ενός είδους απείρων τα οποία σχηματίζουν μία ατελείωτη αλληλουχία.

Αξίζει να γίνει αναφορά στο γεγονός **ότι δεν είναι όλα τα άπειρα πανομοιότυπα**. Ο Cantor αναγνώρισε δύο βασικούς τύπους άπειρου, το **μετρήσιμο άπειρο (countable infinity)** και το **μη-μετρήσιμο άπειρο (uncountable infinity)**.

- **Μετρήσιμο Άπειρο:** Αυτός ο τύπος του απείρου αντιστοιχεί στους φυσικούς αριθμούς  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ . Η συγκεκριμένη έννοια περιγράφει σύνολα των οποίων τα μέλη μπορούν να καταμετρηθούν, όπως τα δωμάτια στο ξενοδοχείο του Hilbert. Αν μπορούμε να αντιστοιχίσουμε κάθε στοιχείο του συνόλου με έναν φυσικό αριθμό, τότε το εν λόγω απειροσύνολο θεωρείται μετρήσιμο.

- **Μη-μετρήσιμο Άπειρο:** Ο Cantor απέδειξε ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι κατά πολύ μεγαλύτερο από το σύνολο των φυσικών αριθμών και κατά συνέπεια το σύνολο των πραγματικών αριθμών συνιστά ένα μη μετρήσιμο άπειρο.

Το γεγονός αυτό φανερώνει ότι το άπειρο δεν είναι μια ενιαία έννοια και ότι **κάποια άπειρα είναι μεγαλύτερα από άλλα**, θεωρία που συγκλόνισε την επιστημονική κοινότητα. Συμπερασματικά, η έννοια του απείρου είναι αναντίρρητα ένα από τα πιο δυσνόητα και αινιγματώδη ζητήματα για τον ανθρώπινο νου. **Το παράδοξο με το ξενοδοχείο του Hilbert αποδεικνύει πώς τα μετρήσιμα άπειρα υιοθετούν νέα στοιχεία δίχως να μεταβάλλονται**. Παράλληλα, οι έννοιες του μετρήσιμου και μη μετρήσιμου απείρου μας καθιστούν σαφές ότι αναφερόμαστε σε μια πραγματικά πολυδιάστατη έννοια, ανυπότακτη στους κανόνες των πεπερασμένων αριθμών, που ξεπερνά κάθε όριο λογικής!



άπειρος = ἄ (στερητικό) + πέρας = χωρίς όριο, χωρίς τέρμα

Γεωργακοπούλου Μαριάννα, Παπαθανασίου Θεοδώρα

# Η Εικασία του Goldbach



**«Κάθε άρτιος φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 2 μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών.»**

Παραδείγματα:

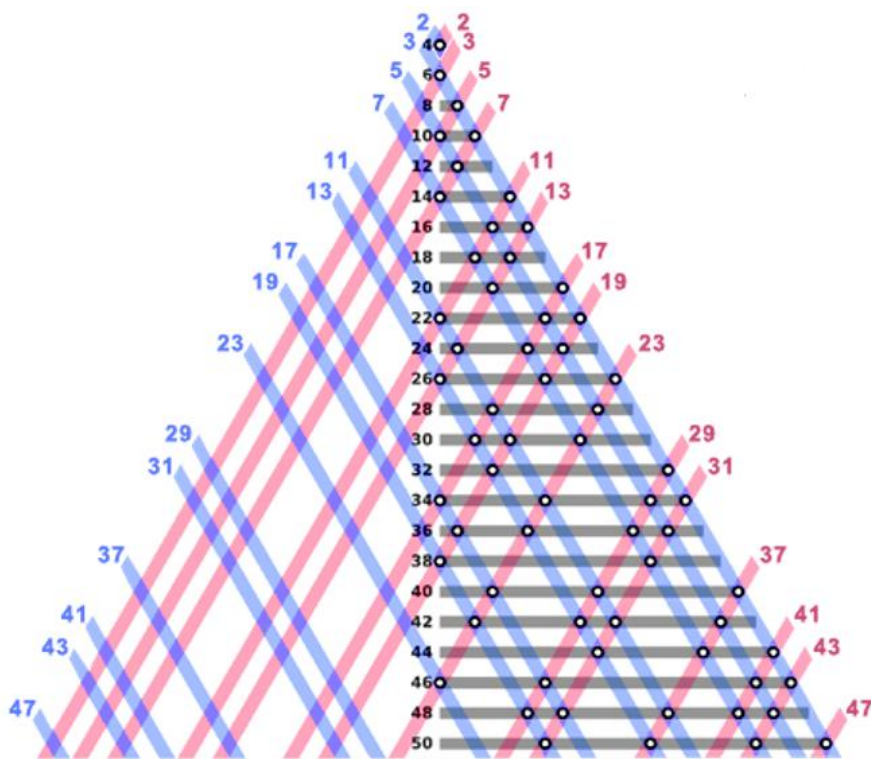
|              |                     |
|--------------|---------------------|
| 4=2+2        | 18=5+13=7+11        |
| 6=3+3        | 20=3+17=7+13        |
| 8=3+5        | 22=3+19=5+17=11+11  |
| 10=3+7=5+5   | 24=5+19=7+17=11+13  |
| 12=5+7       | 26=3+23=7+19=13+13  |
| 14=3+11=7+7  | 28=5+23=11+17       |
| 16=3+13=5+11 | 30=7+23=11+19=13+17 |



Βρείτε όλους τους τρόπους με τους οποίους το 100 εκφράζεται ως άθροισμα δύο πρώτων.

Η Εικασία του Γκόλντμπαχ είναι ένα από τα πιο διάσημα αναπόδεικτα προβλήματα στη θεωρία αριθμών. Διατυπώθηκε από τον Γερμανό μαθηματικό Christian Goldbach το 1742 σε μια αλληλογραφία του με τον Leonhard Euler. **Δεν έχει αποδειχθεί ούτε έχει διαψευσθεί μέχρι σήμερα**, παρά τις προσπάθειες πολλών μαθηματικών. Έχει επαληθευτεί μέσω υπολογιστών για τεράστιους άρτιους αριθμούς όπως π.χ., μέχρι και τον  $4 \times 10^{18}$ , αλλά αυτό **δεν αποτελεί απόδειξη!**

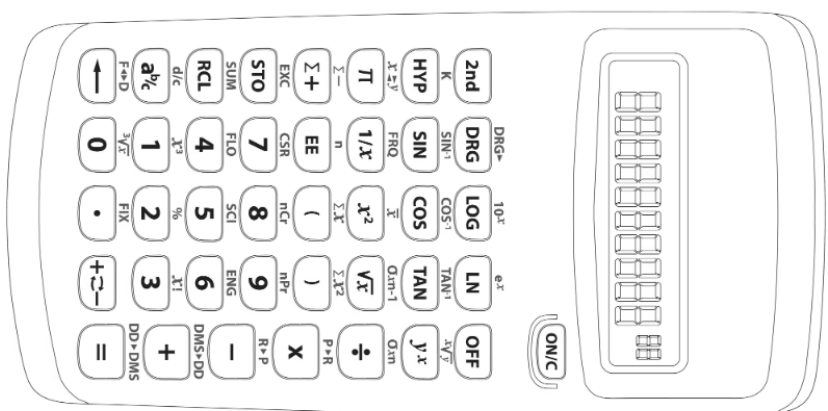
«Είναι ένα πρόβλημα που αξίζει να του επιτεθείς. Αποδεικνύει την αξία του όταν σου αντεπιτεθεί» - Piet Hein



Κίρα Χριστακοπούλου, Μάγου Εμμέλεια, Αναστασία Τσιγκρή

# Κομπιουτεράκι και Μαθηματικά

Στο παρελθόν, οι άνθρωποι χρησιμοποιούσαν βοηθήματα όπως ο άβακας, το κομπτόμετρο, τα κόκκαλα του Νάπιερ, βιβλία με μαθηματικούς πίνακες, τον λογαριθμικό κανόνα ή μηχανικές μηχανές πρόσθεσης, για να κάνουν αριθμητικές πράξεις. **Η πρώτη σύγχρονη φορητή αριθμομηχανή δημιουργήθηκε το 1972 από τον Jack Kilby και τους συνεργάτες του, με το μοντέλο TI-2500 στην Texas instruments.** Έγινε αρκετά δημοφιλής και σε αντίθεση με τις άλλες αριθμομηχανές που κυκλοφορούσαν, δεν εκτύπωνε τις λύσεις, αλλά διέθετε LED οθόνη. Στις μέρες μας η αριθμομηχανή αποτελεί την συνηθέστερη και πιο αξιόπιστη συσκευή για την πραγματοποίηση μαθηματικών πράξεων. Μια αριθμομηχανή εκτελεί μαθηματικούς υπολογισμούς χρησιμοποιώντας ηλεκτρονικά κυκλώματα και ένα εξάρτημα που ονομάζεται μικροεπεξεργαστής. Πιο συγκεκριμένα, η αριθμομηχανή εντοπίζει ποια πλήκτρα πατήθηκαν χρησιμοποιώντας ένα κύκλωμα που ονομάζεται μήτρα πληκτρολογίου. Αυτή η είσοδος στη συνέχεια **μετατρέπεται σε δυαδικό κώδικα** (0 και 1) - τη γλώσσα που κατανοούν οι υπολογιστές - μέσω του επεξεργαστή. Για παράδειγμα, ο αριθμός 19 σε δυαδική μορφή γράφεται ως 10011, δηλαδή  $1 \times 16 + 0 \times 8 + 0 \times 4 + 1 \times 2 + 1 \times 1 = 19$ . Με αυτόν τον τρόπο, η αριθμομηχανή «ερμηνεύει» τους αριθμούς ως ακολουθίες από 0 και 1, ανάλογα με το αν το ηλεκτρονικό κύκλωμα είναι κλειστό (1) ή ανοιχτό (0). Η προσωρινή αποθήκευση των τιμών κατά τη διάρκεια των υπολογισμών γίνεται με τη χρήση της RAM – μνήμη.

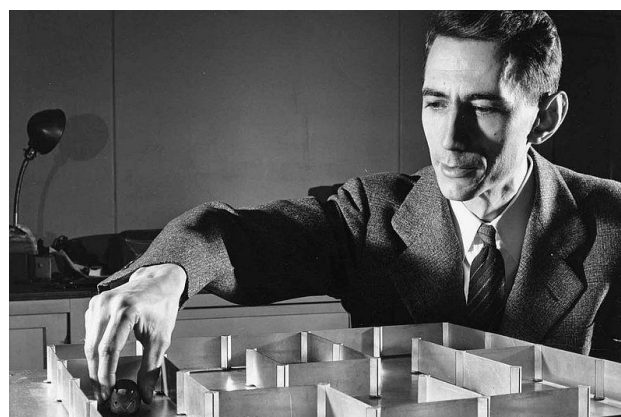


Στη συνέχεια, με τη χρήση του μικροεπεξεργαστή, αφού αυτός λάβει τις δυαδικές εισόδους, ακολουθεί ένα σύνολο προγραμματισμένων οδηγιών για να πραγματοποιήσει την επιθυμητή λειτουργία όπως πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό ή διαίρεση τις οποίες τις έχει αποθηκευμένες στη ROM, μια άλλου τύπου μνήμη. Τα δυαδικά δεδομένα επεξεργάζονται χρησιμοποιώντας ηλεκτρονικά στοιχεία που ονομάζονται τρανζίστορ, τα οποία σχηματίζουν **λογικές πύλες** και εκτελούν την επιθυμητή πράξη με το χειρισμό δυαδικών σημάτων. Η αριθμομηχανή χρησιμοποιεί αριθμητικές λογικές μονάδες, οι οποίες είναι μέρη του τσιπ που έχουν σχεδιαστεί ειδικά για τα μαθηματικά.

Τέλος, με το πάτημα του κουμπιού «=» δίνεται εντολή στην αριθμομηχανή να πραγματοποιήσει την πράξη, σε δυαδικό κώδικα ενώ μετά το αποτέλεσμα μετατρέπεται ξανά σε μορφή αναγνώσιμη από τον άνθρωπο, σε δεκαδικό κώδικα, και εμφανίζεται στην οθόνη της αριθμομηχανής, συνήθως σε LCD. Παρατηρώντας προσεκτικά τους αριθμούς στην οθόνη και θα δούμε ότι **κάθε ψηφίο σχηματίζεται από διαφορετικό μοτίβο επτά τμημάτων ή γραμμών**. Ο επεξεργαστής καταλαβαίνει ότι μπορεί να εμφανίσει οποιονδήποτε από τους αριθμούς 0–9 ενεργοποιώντας έναν διαφορετικό συνδυασμό αυτών των επτά τμημάτων. Δεν μπορεί εύκολα να εμφανίσει γράμματα, αν και μερικές επιστημονικές αριθμομηχανές πιο προηγμένες, τόσο της TI όσο και της CASIO, με πολλές ενσωματωμένες μαθηματικές και επιστημονικές φόρμουλες το υλοποιούν.

Λουμίδα Ανδρομάχη

## Σκάκι, Σύμπαν και Μαθηματικά



Η σχέση μεταξύ των σκακιστικών κινήσεων, του αριθμού των ατόμων στο σύμπαν και των μαθηματικών είναι συναρπαστική. Αρχικά, ο εκτιμώμενος αριθμός νόμιμων κινήσεων σκακιού είναι περίπου  $10^{43}$ . Ο Claude Shannon κατάλαβε ότι **ο αριθμός των πιθανών διαφορετικών παιχνιδιών σκακιού φτάνει περίπου  $10^{120}$** . Μπορούμε να φανταστούμε το σκάκι ως ένα δέντρο, όπου κάθε κόμβος αντιπροσωπεύει μια θέση και κάθε ακμή μια κίνηση. Σε κάθε θέση μπορεί να οδηγήσει σε πολλές πιθανές επόμενες κινήσεις, δημιουργώντας ένα δέντρο με τεράστιο αριθμό κλαδιών. Κάθε νέα κίνηση προσθέτει περισσότερες επιλογές στο παιχνίδι. Ο αριθμός των πιθανών καταστάσεων αυξάνεται πολύ γρήγορα καθώς σκεφτόμαστε κάθε πιθανό βήμα στο παιχνίδι. Αν και δεν μπορούμε να γνωρίζουμε ακριβώς κάθε κίνηση, μπορεί να υπάρχουν περίπου  $10^{120}$  πιθανές παραλλαγές παιχνιδιού, συμπεριλαμβανομένων παράνομων κινήσεων. **Ο αριθμός των ατόμων στο παρατηρήσιμο σύμπαν εκτιμάται ότι είναι περίπου  $10^{81}$** , που είναι απίστευτα μεγάλο. Αυτός ο αριθμός περιλαμβάνει άτομα σε κάθε αστέρι, πλανήτη και άλλη ύλη στο γνωστό σύμπαν. Αξιοθαύμαστο αποτελεί το γεγονός ότι ο αριθμός των διαφορετικών παιχνιδιών σκακιού είναι ακόμη μεγαλύτερος από αυτόν τον αριθμό, κάτι που είναι εκπληκτικό!

Παπασιδέρης Παναγιώτης

# Όταν οι αριθμοί παίζουν χρηματιστήριο:

## Η μαγεία των «συναλλαγών ζευγών»

Οι συναλλαγές ζευγών είναι μια ουδέτερη ως προς την αγορά στρατηγική που εκμεταλλεύεται τις σχετικές κινήσεις δύο συσχετισμένων μετοχών. Οι επενδυτές εντοπίζουν δύο χρηματοοικονομικά μέσα που ιστορικά κινούνται παράλληλα και επιδιώκουν να επωφεληθούν από οποιαδήποτε προσωρινή απόκλιση στις τιμές τους. Σε αυτό το άρθρο, θα εξερευνήσουμε τις βασικές έννοιες πίσω από τις συναλλαγές σε συσχετισμένους δείκτες ζευγών και πώς οι μαθηματικοί δείκτες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη δημιουργία μιας κερδοφόρας στρατηγικής. Οι επενδυτές χρησιμοποιούν έναν συντελεστή συσχέτισης για να αξιολογήσουν πόσο στενά κινούνται οι δείκτες αυτοί μαζί. Μια συσχέτιση άνω του 0,8 υποδηλώνει ισχυρή ευθυγράμμιση, καθιστώντας το ζεύγος κατάλληλο για συναλλαγές ζευγών. **Η βασική υπόθεση είναι ότι, όταν δύο εξαιρετικά συσχετισμένοι δείκτες αποκλίνουν σημαντικά, υπάρχει η τάση να επιστρέψουν προς τη μέση τιμή τους.** Αυτό περιγράφεται από το μαθηματικό μοντέλο της επαναφοράς στη μέση τιμή (mean reversion).



Ως παράδειγμα θα χρησιμοποιηθούν οι γνωστοί δείκτες NAS100 και SPX500. Στο πλαίσιο των συναλλαγών σε δείκτες, οι NAS100 και SPX500 έχουν υψηλή θετική συσχέτιση, καθώς και οι δύο δείκτες εκπροσωπούν μετοχές μεγάλης κεφαλαιοποίησης των αμερικανικών αγορών. Σύμφωνα με ιστορικά δεδομένα της τελευταίας δεκαετίας η σχέση των 2 δεικτών, είναι περίπου 1,55245, αφού ο δείκτης NAS100 έδειξε επίδοση +272.58%, ενώ δείκτης SPX500 έδειξε επίδοση +179.04%.

Οι δείκτες NAS100 vs. SPX500 στο χρονικό πλαίσιο τελευταίας δεκαετίας. Ο δείκτης NAS100 έχει ξεπεράσει τον SPX500 με υπολογίσιμη διαφορά, η οποία οφείλεται στην ισχυρή ανάπτυξη του τομέα τεχνολογίας και των μεγάλων εταιρειών που περιλαμβάνονται στον δείκτη.

Αν τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης του δείκτη Nasdaq 100 (NQ) ανεβαίνουν σημαντικά, ενώ τα S&P 500 futures (ES) πέφτουν, μπορεί να είναι ευκαιρία για κερδοσκοπημένη αγοροπωλησία. Ο αγοροπωλητής θα εκτελέσει Short NQ (που είναι υπερτιμημένο) και Long ES (που είναι υποτιμημένο). Όταν η απόκλιση επιστρέψει στην κανονική τιμή, ο trader κλείνει τη θέση και κερδίζει από τη διαφορά.

Η θεωρία της στρατηγικής βασίζεται στην παραδοχή ότι η διαφορά των τιμών των δύο assets επιστρέφει στη μέση τιμή της. Για να ελεγχθεί αυτό, χρησιμοποιούμε το Engle-Granger Cointegration Test. Ορίζουμε τις χρονοσειρές των τιμών:  $S_1(t)$  = Τιμή του πρώτου asset (π.χ. NAS100) και  $S_2(t)$  = Τιμή του δεύτερου asset (π.χ. SPX500). Ορίζουμε τη διαφορά των τιμών (spread):

$$Z_t = S_1(t) - \beta S_2(t)$$

όπου  $\beta$  είναι ο συντελεστής αντιστάθμισης (hedge ratio) που υπολογίζεται με γραμμική παλινδρόμηση:

$$S_1(t) = \alpha + \beta S_2(t) + \epsilon_t$$

Αν το  $Z_t$  είναι στάσιμο (stationary), μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για κερδοσκοπημένη αγοροπωλησία. Στη συνέχεια πρέπει να επιστρέψουμε στη μέση τιμή. Αυτό γίνεται μέσω της διαφοράς  $Z_t$ , η οποία μπορεί να μοντελοποιηθεί με Ornstein-Uhlenbeck process:

$$dZ_t = \theta(\mu - Z_t)dt + \sigma dW_t$$

$\theta$  = ταχύτητα επιστροφής στη μέση τιμή,  $\mu$  = μέση τιμή του spread,  $\sigma$  = μεταβλητότητα,  $dW_t$  = τυχαίος θόρυβος (Wiener process)

Αν  $\theta > 0$ , τότε το spread έχει mean reversion, και η στρατηγική είναι βιώσιμη.

Εφαρμογή συστήματος:

Για να καθορίσουμε τα σημεία εισόδου, υπολογίζουμε το Z-score του spread:

$$Z - \text{score} = \frac{Z_t - \mu}{\sigma}$$

Σήματα εισόδου:

Αγορά ES & Πώληση NQ όταν  $Z - \text{score} > 2$  (spread είναι υπερτιμημένο)

Αγορά ES & Πώληση NQ όταν  $Z - \text{score} < -2$  (spread είναι υποτιμημένο)

Κλείσιμο θέσης όταν

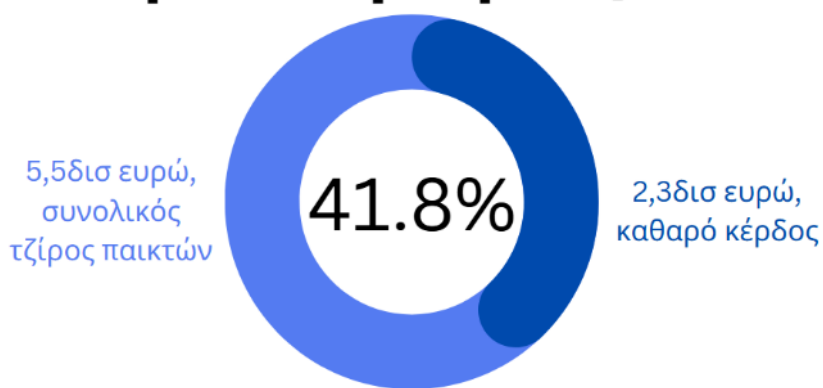
$$Z - \text{score} \approx 0$$

Συμπερασματικά, **οι συναλλαγές σε συσχετισμένους δείκτες ζευγών βασίζονται σε μαθηματικά, στατιστικά στοιχεία και θεμελιώδη ανάλυση.** Με σωστή αξιολόγηση κινήσεων τιμών, ρευστότητας και μακροοικονομικών δεδομένων, οι επενδυτές μπορούν να αναπτύξουν ένα αποτελεσματικό και κερδοφόρο σύστημα.

# Η Στατιστική των Τυχερών Παιχνιδιών: Ανάλυση και Συμπεράσματα

Τα τυχερά παιχνίδια αποτελούν μια από τις παλαιότερες και πιο διαδεδομένες μορφές διασκέδασης, με τη στατιστική να παίζει καθοριστικό ρόλο στην κατανόηση των πιθανοτήτων και των αποδόσεων αυτών των παιχνιδιών. Στα παιχνίδια αυτά σημαντικό ρόλο παίζουν οι πιθανότητες αλλά και οι ψυχολογικοί παράγοντες. Αν και στο άρθρο αυτό θα αναφερθούμε μονάχα στο μαθηματικό κομμάτι, δεν πρέπει να παραλείψουμε το γεγονός πως ο παίκτης δεν πρέπει να παρασύρεται ψυχολογικά και να αφήνει τα συναισθήματα του να τον επηρεάσουν.

## Ετήσια κέρδη καζίνο



### Βασικές Αρχές Πιθανοτήτων και Τυχερών Παιχνιδιών

Η θεωρία των πιθανοτήτων αποτελεί τη θεμελιώδη βάση για την κατανόηση τυχερών παιχνιδιών. Τα περισσότερα παιχνίδια καζίνο, όπως η ρουλέτα, το μπλακτζάκ και το πόκερ, βασίζονται σε αυστηρούς μαθηματικούς κανόνες που καθορίζουν τις πιθανότητες νίκης και ήττας. Στη ρουλέτα, για παράδειγμα, η πιθανότητα να βγει ένας συγκεκριμένος αριθμός είναι 1 στις 37, στην ευρωπαϊκή έκδοση και **1 στις 38** στην αμερικανική, λόγω της προσθήκης του διπλού μηδέν (00). Αυτή η διαφορά αυξάνει το πλεονέκτημα του καζίνο, μειώνοντας την πιθανότητα του παίκτη να κερδίσει. Το **πλεονέκτημα του καζίνο (house edge)** εκφράζει το στατιστικό ποσοστό των στοιχημάτων που το καζίνο αναμένεται να κερδίσει μακροπρόθεσμα. Όπου είναι 2,7% στην ευρωπαϊκή έκδοση και 5,26% στην αμερικανική. Όπως βλέπουμε και **από τις πιθανότητες το καζίνο μακροπρόθεσμα πάντα κερδίζει**. Όπως φαίνεται και από το παραπάνω γράφημα οι παίκτες έχουν 41.8% απώλεια από τα συνολικά χρήματα που παίζουν.

Στα παιχνίδια με τράπουλα, όπως για παράδειγμα το μπλακτζάκ, η πιθανότητα εξαρτώνται όχι μόνο από τη στατιστική κατανομή των φύλλων αλλά και από τις αποφάσεις του παίκτη. Η σωστή στρατηγική, βασισμένη στις πιθανότητες των διαθέσιμων φύλλων, μπορεί να μειώσει το πλεονέκτημα του καζίνο και να αυξήσει την πιθανότητα κέρδους του παίκτη από 0,5% έως 2%, ανάλογα με τη στρατηγική του.

Η βασική στρατηγική (basic strategy) είναι ένα σύνολο βέλτιστων αποφάσεων που βασίζονται σε στατιστικούς υπολογισμούς. Αυτή η στρατηγική δείχνει πότε ο παίκτης πρέπει να τραβήξει φύλλο (hit), να σταματήσει (stand), να διπλασιάσει (double down) ή να χωρίσει (split), ανάλογα με το ανοιχτό φύλλο του ντίλερ.



Η πιο αποτελεσματική στρατηγική που απαγορεύεται στα καζίνο είναι η καταμέτρηση φύλλων η οποία μπορεί να μειώσει το πλεονέκτημα του καζίνο ακόμα και να το αντιστρέψει υπέρ του παίκτη.

Καρασσαβίδης Ιωάννης, Καέρης Λάμπρος

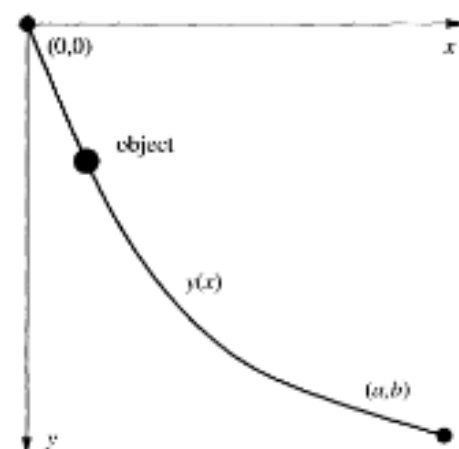
## Brachistochrone Curve

### Το Βραχυστόχρονο Πρόβλημα

Το βραχυστόχρονο πρόβλημα περιλαμβάνει την ανάλυση της τροχιάς μιας καμπύλης που συνδέει δύο διακριτά σημεία, παραβλέποντας σκόπιμα τυχόν επιπτώσεις της τριβής και άλλες πιθανές εξωτερικές δυνάμεις που θα μπορούσαν να επηρεάσουν την κίνηση εκτός της βαρύτητας. Πιο απλά, η καμπύλη της βραχυστοχρόνης (Brachistochrone Curve) είναι ένα κλασικό πρόβλημα φυσικής και μαθηματικών, που μας δείχνει ότι **η ταχύτερη διαδρομή μεταξύ δύο σημείων Α και Β που βρίσκονται σε διαφορετικά υψόμετρα είναι μια καμπύλη**. Αν και αυτό το πρόβλημα μπορεί να φαίνεται απλό, προσφέρει ένα αντίθετο-δαισθητικό αποτέλεσμα και επομένως είναι συναρπαστικό να το παρακολουθήσετε!

### Μετρώντας τον Χρόνο της Πτώσης

Δίνεται μια συνάρτηση  $y(x)$  που έχει γραφική παράσταση μια καμπύλη από  $(0,0)$  έως  $(a,b)$ , πόσο χρόνο θα πάρει ένα αντικείμενο που τοποθετείται στη θέση  $(0,0)$  για να γλιστρήσει και να φθάσει στο χαμηλότερο σημείο;



Για να υπολογίσουμε το χρόνο χρησιμοποιούμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας, διαφορικές εξισώσεις και ολοκληρώματα.

Η γενική προσέγγιση σε τέτοιες περιπτώσεις είναι να εφαρμόσουμε τη διαφορική εξίσωση της κίνησης για το αντικείμενο κατά μήκος της καμπύλης. Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο του άκρου ελάχιστου χρόνου ή κανόνα του Brachistochrone, ο οποίος λέει ότι το μονοπάτι που μειώνει τον χρόνο για ένα αντικείμενο να ταξιδέψει από την αρχή μέχρι το τέλος είναι το καμπύλο μονοπάτι που είναι ισοδύναμο με ένα καμπύλο της καμπύλης της αψίδας (catenary). Αν θεωρήσουμε ότι το αντικείμενο γλιστρά σε μια καμπύλη με την εξίσωση  $y=y(x)$ , και αν θεωρήσουμε ότι το αντικείμενο ξεκινά από το  $(0, 0)$  και τελειώνει στο  $(a, b)$ , τότε ο χρόνος  $t$  που θα χρειαστεί για να διανύσει το μονοπάτι είναι:

$$t = \int_0^a \frac{ds}{v(x)}$$

Όπου:

1.  $ds$  είναι το στοιχείο της απόστασης κατά μήκος της καμπύλης, και υπολογίζεται ως:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

2.  $v$  είναι η ταχύτητα του αντικειμένου κατά μήκος της καμπύλης, η οποία εξαρτάται από την επιτάχυνση και άλλες φυσικές παραμέτρους.

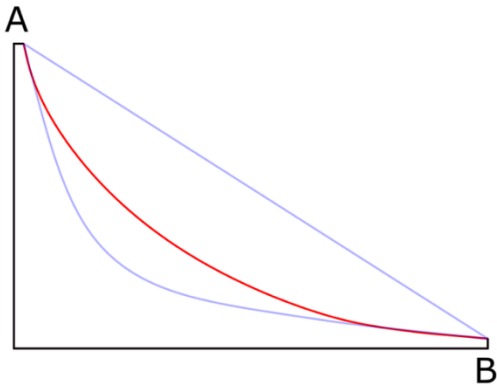
Η ταχύτητα  $v(x)$  μπορεί να υπολογιστεί με την εξίσωση του έργου και της ενέργειας:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy(x)$$

Όπου  $m$  είναι η μάζα του αντικειμένου και  $g$  είναι η επιτάχυνση λόγω βαρύτητας. Με την παραπάνω εξίσωση, μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα και συνεπώς τον χρόνο που χρειάζεται το αντικείμενο για να γλιστρήσει από τη μια άκρη της καμπύλης στην άλλη.

## Απόδειξη με την Χρήση του Νόμου του Snell

Μία από τις προσεγγίσεις για την επίλυση του βραχυστόχρονου προβλήματος είναι η αντιμετώπιση του προβλήματος σχεδιάζοντας αναλογίες με το νόμο του Snell. Ο νόμος του Snell χρησιμοποιείται για να περιγράψει το μονοπάτι που θα ακολουθούσε μια δέσμη φωτός για να φτάσει από το ένα σημείο στο άλλο κατά τη μετάβαση σε δύο διαφορετικά μέσα, χρησιμοποιώντας την αρχή του Fermat, που λέει ότι μια δέσμη φωτός θα ακολουθεί πάντα την πιο γρήγορη διαδρομή.



Δεδομένου ότι ένα αντικείμενο ελεύθερης πτώσης υπό την επίδραση του βαρυτικού πεδίου μπορεί να συγκριθεί με μια δέσμη φωτός που μεταβαίνει μέσω μεταβαλλόμενων μέσων, κάθε φορά που η δέσμη φωτός συναντά ένα νέο μέσο, η δέσμη αποκλίνει ελαφρά. Η γωνία αυτής της απόκλισης μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας το νόμο του Snell. Καθώς κάποιος συνεχίζει να προσθέτει στρώματα ελαττωτικής πυκνότητας μπροστά από την αποκλίνουσα δέσμη φωτός, έως ότου η δέσμη φτάσει στην κρίσιμη γωνία, όπου η δέσμη απλώς ανακλάται, η τροχιά της δέσμης περιγράφει την καμπύλη της βραχυστόχρονου (κόκκινη καμπύλη στο διπλανό διάγραμμα).

Η καμπύλη brachistochrone είναι στην πραγματικότητα ένα κυκλοειδές, που είναι **η καμπύλη που διαγράφεται από ένα σημείο στο χείλος ενός κυκλικού τροχού καθώς ο τροχός κυλά κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής χωρίς να γλιστράει**. Έτσι, αν χρειαστεί να σχεδιάσουμε την καμπύλη, μπορούμε απλώς να χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω μέθοδο για να τη δημιουργήσουμε. Μια άλλη μοναδική ιδιότητα της καμπύλης είναι ότι μια μπάλα που απελευθερώνεται από οποιοδήποτε σημείο της καμπύλης θα χρειαστεί ακριβώς τον ίδιο χρόνο για να φτάσει στον πυθμένα.

Νικόπουλος Νικόλας, Ουϊλκινσον Μάξιμος

# Το τελευταίο Θεώρημα του Fermat



Το τελευταίο Θεώρημα του Fermat εντάσσεται στη θεωρία αριθμών και διατυπώνεται ως εξής :

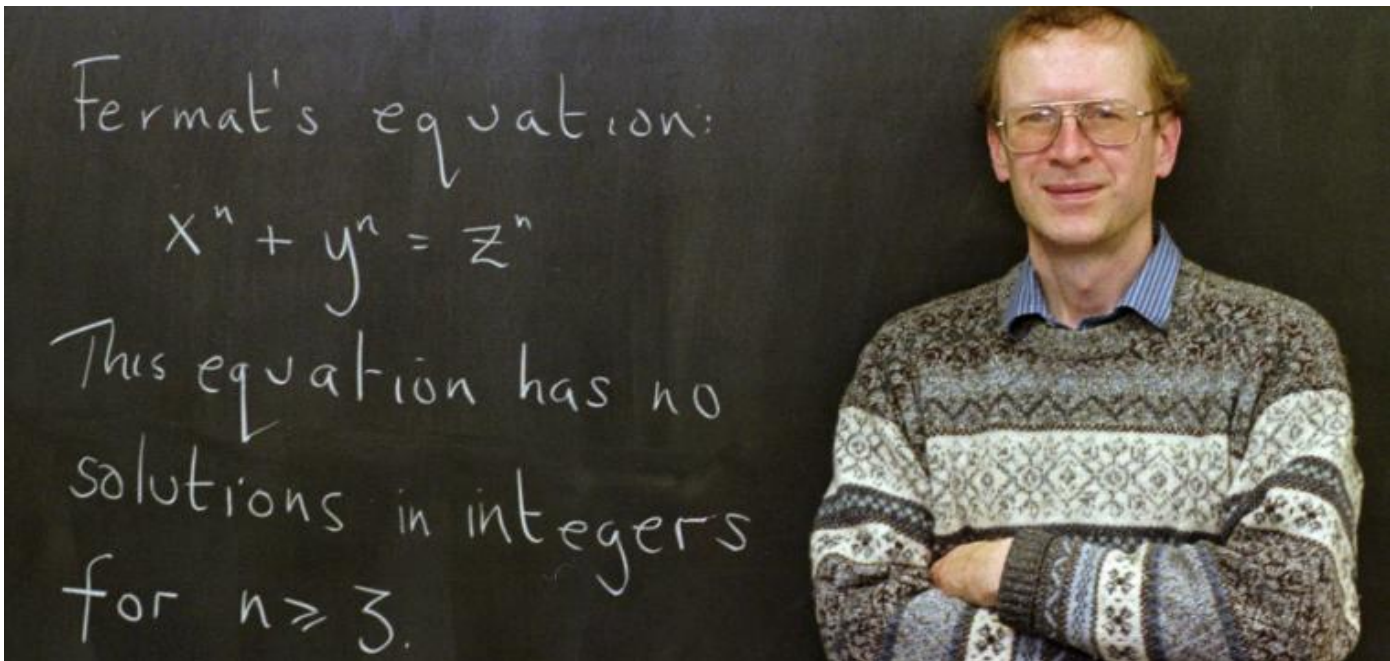
**Δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι αριθμοί  $x, y, z$  που να ικανοποιούν την εξίσωση**

$$x^n + y^n = z^n, \text{ για } n \geq 3$$

Ο Πιερ ντε Φερμά (Pierre de Fermat) γεννήθηκε στις 17 Αυγούστου του 1601 από οικογένεια Γάλλων πλουσίων εμπόρων και σπούδασε Νομική. Παρόλο που στις μέρες μας, χαρακτηρίζεται ως ερασιτέχνης μαθηματικός, αφιέρωσε τεράστιο μέρος της ζωής του στα μαθηματικά.

Έγραψε στο περιθώριο του αντιγράφου του της "Αριθμητικής" του Διόφαντου: **«Έχω μια πραγματικά θαυμάσια απόδειξη αυτής της πρότασης, αλλά το περιθώριο είναι πολύ στενό για να την χωρέσει»**. Παρόλο που συνέλαβε αυτή την ιδέα, δεν βρέθηκε κάποια απόδειξη από τον ίδιο.

Για περίπου 400 χρόνια το Θεώρημα αποτέλεσε μια από τις μεγαλύτερες προκλήσεις στη θεωρία αριθμών. Όμως **το 1994 ο Άγγλος μαθηματικός Andrew Wiles** (εικονιζόμενος στα δεξιά) **αποδεικνύει** το Θεώρημα, έπειτα από 7 χρόνια σκληρής δουλειάς και απόλυτης μυστικότητας.



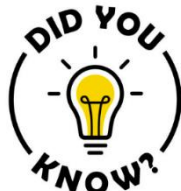
Η αναγνώριση του επιτεύγματος του Γουάιλς τον μετέτρεψε σε έναν από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς του 20<sup>ου</sup> αιώνα και η έγκριση της απόδειξης του Θεωρήματος του Φερμά σήμανε την οριστική επίλυση ενός από τα πιο περίπλοκα μαθηματικά ζητήματα όλων των εποχών που παρέμεινε αναπόδεικτο για αιώνες. Η επιτυχία του ήταν ένα **μάθημα για τη σημασία της επιμονής και της μακροχρόνιας αφοσίωσης σε έναν συγκεκριμένο σκοπό**. Η απόδειξη του Θεωρήματος αποτέλεσε μια τεράστια επιτυχία για τη μαθηματική κοινότητα και υπογραμμίζει την αξία της συνεργασίας μεταξύ των μαθηματικών από διαφορετικές εποχές που έβαλαν το δικό τους λιθαράκι ξεχωριστά, με κοινό στόχο την απόδειξη αυτού του τόσο ξεχωριστού Θεωρήματος.

Νιλ Χρήστος, Τούμπουρος Ζήκος

## Μαγικό τετράγωνο ... 2025

Ένα μαγικό τετράγωνο αποτελεί μια διάταξη αριθμών σε έναν πίνακα ίσου πλήθους γραμμών και στηλών, όπου το **άθροισμα** των αριθμών στην ίδια **σειρά** ή **στήλη** ή **διαγώνιο** του τετραγώνου δίνει πάντα το **ίδιο αποτέλεσμα**.

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 410 | 417 | 394 | 401 | 403 |
| 396 | 398 | 405 | 412 | 414 |
| 407 | 409 | 416 | 393 | 400 |
| 413 | 395 | 402 | 404 | 411 |
| 399 | 406 | 408 | 415 | 397 |



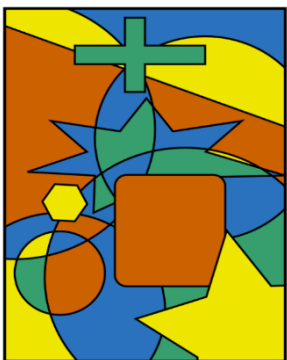
- Σε ένα δωμάτιο 23 ατόμων υπάρχει **50%** πιθανότητα δύο άτομα να έχουν την ίδια ημέρα γενέθλια. Αναζητήστε το ως «το παράδοξο των γενεθλίων».
- Πολλά σημάδια σε οστά ζώων δείχνουν ότι οι άνθρωποι κάνουν μαθηματικά από περίπου το **30.000 π.Χ.**
- **Το μηδέν δεν αναπαρίσταται με λατινικούς αριθμούς!**

## Ένας ξεχωριστός αριθμός: το μηδέν

Η έννοια του μηδενός είναι αρκετά δύσκολο να γίνει αντιληπτή καθώς δεν είναι έμφυτη στον άνθρωπο αλλά προϊόν **επινόησης**. Τι είναι λοιπόν το μηδέν; Το μηδέν είναι κάτι βαθυστόχαστο. Αντιπροσωπεύει την απουσία, το **ουδέν**, το τίποτα. Πως γίνεται όμως το τίποτα να είναι κάτι; Σύμφωνα με τον καθηγητή μαθηματικών του Harvard Robert Kaplan **«το μηδέν βρίσκεται στο μυαλό, όχι όμως στον αισθητηριακό κόσμο»**. Η ανάγκη της ύπαρξης του μηδενός στα Μαθηματικά είναι θεμελιώδης καθώς στην ευθεία των αριθμών αποτελεί το **«σύνορο»** μεταξύ αρνητικών και θετικών αριθμών.

Αραπάκη Αλεξάνδρα

## Το Θεώρημα των τεσσάρων χρωμάτων

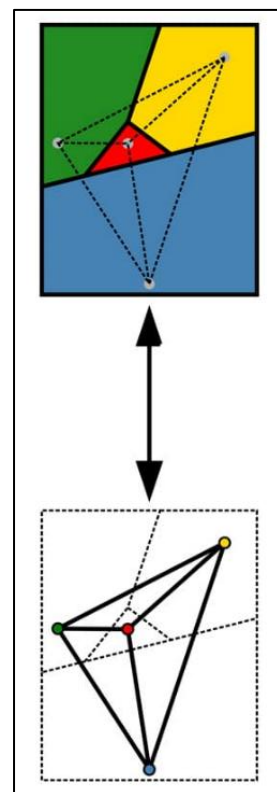


Το Θεώρημα των τεσσάρων χρωμάτων ανακαλύφθηκε από τον Francis Guthrie το 1852 όπου ισχυρίζεται ότι όλοι οι χάρτες μπορούν να χρωματιστούν χρησιμοποιώντας **το πολύ τέσσερα χρώματα, έτσι ώστε δύο γειτονικές περιοχές να μην έχουν το ίδιο χρώμα**. Όμως, παρά το ότι το Θεώρημα φαίνεται απλό, η απόδειξη του είναι πολύπλοκη. Η πολυπλοκότητα του προβλήματος έγκειται στον τεράστιο αριθμό πιθανών διαμορφώσεων του χάρτη. Η απόδειξη των Appel και Haken περιλάμβανε τον έλεγχο σχεδόν 2.000 διαφορετικών περιπτώσεων και την ανάλυση πάνω από 1.479 ειδικών διαμορφώσεων, ένα έργο που είναι αδύνατο να ολοκληρωθεί με το χέρι. Είναι μια μακρά και περίπλοκη διαδικασία που οδήγησε στους Kenneth Appel και Wolfgang Haken να το αποδείξουν (;) με την βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή το 1976.

**Γιατί απαιτούνται τέσσερα χρώματα;** Αν χρησιμοποιούσαμε μόνο τρία χρώματα, θα υπήρχαν περιπτώσεις που τουλάχιστον δύο περιοχές θα κατέληγαν να έχουν το ίδιο χρώμα. Αν χρησιμοποιούσαμε πέντε χρώματα, ένα θα περίσσει! Μια άλλη μέθοδος για να συμβολιστεί αυτό είναι να χρησιμοποιήσουμε γραφήματα, στα οποία κάθε περιοχή θα αντιπροσωπεύεται από ένα σημείο και οι γειτνιάζουσες περιοχές συνδέονται μεταξύ τους με ακμές. Όταν το γράφημα είναι πλήρως συνδεδεμένο, σχηματίζει τρίγωνα. Αυτά αποδεικνύουν ότι χρειαζόμαστε τουλάχιστον τέσσερα χρώματα αφού κάθε τρίγωνο απαιτεί τουλάχιστον τρία διαφορετικά χρώματα καθώς αυτά αποτελούνται από τρεις κορυφές. Με την προσθήκη μιας επιπλέον κορυφής στο γράφημα, ο ελάχιστος αριθμός χρωμάτων για την κάλυψη όλων των περιοχών χωρίς επαναλήψεις είναι τέσσερα.

Το θεώρημα έχει **εφαρμογές** σε ένα ευρύ φάσμα πεδίων. Στα **δίκτυα υπολογιστών**, συμβάλλει στην ανάθεση συχνοτήτων ώστε να μην προκύπτουν παρεμβολές. Επιπλέον, έχει σημαντική συμβολή στον **προγραμματισμό** αφού διασφαλίζει ότι δεν επικαλύπτονται γεγονότα. Οι επιστήμονες ανάλυσης αλγορίθμων το χρησιμοποιούν για να διαχειριστούν πόρους και να αποφύγουν συγκρούσεις στα δεδομένα ενός υπολογιστικού συστήματος. Αυτό το θεώρημα, το οποίο ξεκίνησε ως μια απλή παρατήρηση, απέκτησε πολλές εφαρμογές, αναδεικνύοντας την συμβολή της επιμονής της τεχνολογίας στην **επίλυση πολύπλοκων προβλημάτων**.

Κοφινάς Νικόλας, Κραμποβίτης Παναγιώτης, Λαμπέας Στέφανος



## Γυναίκες Μαθηματικοί που διέπρεψαν και βοήθησαν σημαντικά στα Μαθηματικά

Η ιστορία των Μαθηματικών έχει πάντα παρουσιαστεί ως μια κατά κύριο λόγο ανδρική υπόθεση, ωστόσο η συμβολή των γυναικών στον τομέα αυτό είναι αξιοσημείωτη και καθοριστική για την εξέλιξη της επιστήμης. Από την αρχαιότητα μέχρι τη σύγχρονη εποχή, πολλές γυναίκες διακρίθηκαν για τις εξαιρετικές τους γνώσεις και την πρωτοποριακή τους σκέψη. Από την **Θεανώ** μέχρι την διάσημη **Υπατία της Αλεξάνδρειας**, αυτές οι γυναίκες διαμόρφωσαν τον κόσμο των μαθηματικών με τις σπουδαίες τους ανακαλύψεις και την βαθιά τους κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, συμβάλλοντας στην ανάπτυξη της επιστήμης και στην καταπολέμηση των προκαταλήψεων της εποχής τους.

Η **Υπατία** ήταν μια από τις πιο γνωστές και επιτυχημένες γυναίκες μαθηματικούς στην ιστορία της επιστήμης. Έζησε τον 4ο περίπου αιώνα μ.Χ., γεννήθηκε και έζησε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου. Κύριο έργο της ήταν ο σχολιασμός της στα Αριθμητικά του Διόφαντου, με την συνεισφορά της να είναι ύψιστης σημασίας, αφού χωρίς εκείνη, τα έργα του Διοφάντου που θα είχαμε θα ήταν ελάχιστα. Συγκεκριμένα, σχολίασε τους **έξι πρώτους τόμους, οι οποίοι κίολας ήταν οι μόνοι στα Ελληνικά**.

Η **Πανδροσίων**, ή αλλιώς Πανδροσίωνα, στο παρελθόν οι λόγιοι την θεωρούσαν ως άνδρα. Ωστόσο πολλοί μελετητές έχουν αποδείξει ότι είναι γυναίκα, όπως για παράδειγμα σε ένα χειρόγραφο της όπου απευθύνει τον εαυτό της ως γυναίκα. Ένα κύριο έργο της ήταν η λύση της κυβικής ρίζας, η οποία σχετιζόταν με το πρόβλημα του διπλασιασμού του όγκου ενός κύβου. Επίσης, είχε μια ακριβή μέθοδο κατασκευής του γεωμετρικού μέσου, η οποία ήταν απλούστερη του Πάππου του Αλεξανδρέως.

Η **Θεανώ** από τον Κρότωνα, κόρη του γιατρού Βροντίνου, ήταν μαθήτρια και ένθερμη οπαδός του Πυθαγόρα. Παντρεύτηκε στην Σάμο τον μεγάλο Μύστη με τον οποίο είχε 36 χρόνια διαφορά ηλικίας. Δίδαξε στις πυθαγόρειες σχολές της Σάμου και του Κρότωνος. Η Θεανώ θεωρείται **η ψυχή της θεωρίας των αριθμών**, που έπαιξαν κυριαρχικό και καίριο ρόλο στην πυθαγόρεια διδασκαλεία. Στην ίδια αποδίδεται η πυθαγόρεια άποψη της **«Χρυσής Τομής»**. Της αποδίδονται ακόμα διάφορες **κοσμολογικές θεωρίες**. Μετά τον θάνατο του Πυθαγόρα η Θεανώ τον διαδέχθηκε ως επικεφαλής της διασκορπισμένης πλέον κοινότητας. Με την βοήθεια των θυγατέρων της διέδωσε το επιστημονικό και φιλοσοφικό πυθαγόρειο σύστημα σε όλη την Ελλάδα και την Αίγυπτο. Με τον Πυθαγόρα απέκτησε, εκτός από τις θυγατέρες και δύο υιούς, τον Τηλαύγη και τον Μνήσαρχο. Ο Ιάμβλιχος την μνημονεύει ως **«μαθηματικόν άξιαν μνήμης κατά παιδείαν»**.

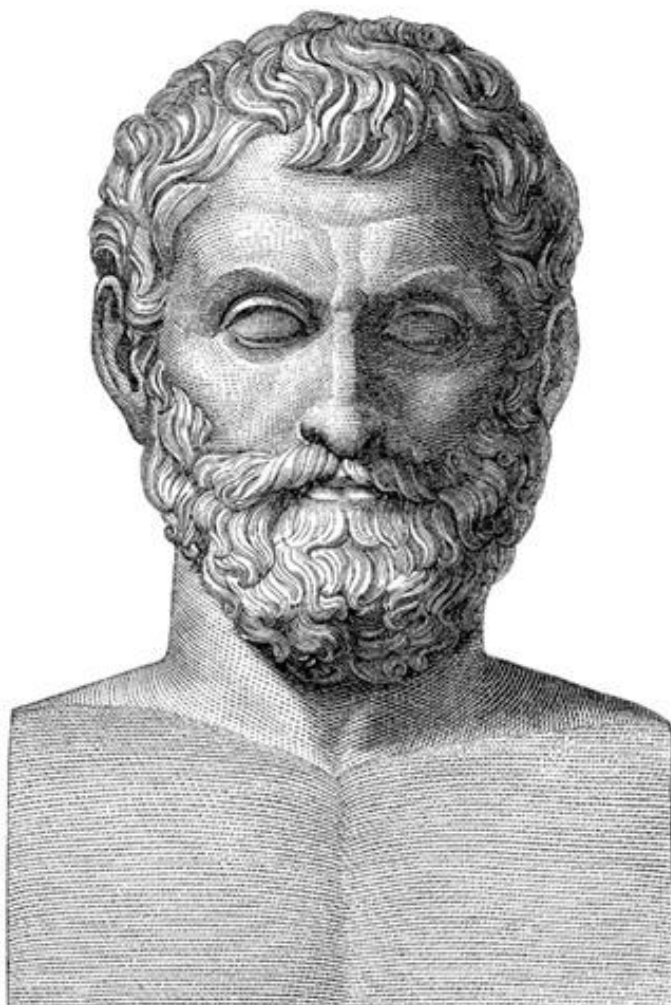
Η συνεισφορά αυτών των γυναικών στα μαθηματικά δεν ήταν απλώς εντυπωσιακή· ήταν **θεμελιώδης για την εξέλιξη της επιστήμης**. Παρά τις κοινωνικές προκαταλήψεις και τα εμπόδια που αντιμετώπισαν, κατόρθωσαν να αφήσουν το στίγμα τους, **εμπνέοντας τόσο τις σύγχρονές τους όσο και τις επόμενες γενιές μαθηματικών και επιστημόνων**. Η ιστορία τους αποτελεί απόδειξη ότι η επιστήμη δεν γνωρίζει φύλο και ότι η αφοσίωση, η ευφυΐα και η επιμονή μπορούν να υπερνικήσουν κάθε εμπόδιο. Αναγνωρίζοντας τη συμβολή αυτών των γυναικών, δεν τιμούμε μόνο το έργο τους, αλλά ενισχύουμε και το μήνυμα ότι η γνώση και η πρόοδος ανήκουν σε όλους.

Ευσταθοπούλου Δανάη



## Ο Θαλής και η προσωκρατική φιλοσοφία

Ο Θαλής ο Μιλήσιος, **φιλόσοφος της αρχαίας Ελλάδας**, ήταν ένας από τους κυριότερους εκπροσώπους της προσωκρατικής φιλοσοφίας. Σε εκείνον αποδίδεται η μεγαλύτερη από τις επινοήσεις του ανθρώπου, δηλαδή **η επινόηση της απόδειξης στα μαθηματικά**. Επιπλέον, ανέπτυξε **προτάσεις**, όπως ότι «Η διάμετρος διχοτομεί τον κύκλο», «Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες», «Οι παρά τη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες», «Η γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή», «Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά ίση και τις γωνίες που πρόσκεινται σ' αυτήν ίσες, είναι ίσα» και τέλος **θεωρήματα**, σχετικά με τα όμοια τρίγωνα. Η προσωκρατική φιλοσοφία γεννήθηκε στην Ιωνία κυρίως κατά τον 6ο αιώνα π.Χ. και διαδόθηκε βαθμιαία στον υπόλοιπο ελληνισμό. Κύριο θέμα της ήταν η **αναζήτηση της προέλευσης του κόσμου** και η **διείσδυση στη βασική δομή της φύσης**. Οι προσωκρατικοί φιλόσοφοι προχώρησαν στην έρευνά τους απαντώντας, με τρόπο όμως δογματικό, στο κεντρικό ερώτημα για την αρχική ουσία των όντων και προσπαθώντας να φωτίσουν όσα προβλήματα απορρέουν από αυτό.



Ο Θαλής συνέβαλε στην ανάπτυξη της φιλοσοφίας αυτής, αφού, εισήγαγε την **ιδέα της φυσικής αιτιότητας**, απομακρύνοντας την ερμηνεία του κόσμου από τις μυθικές και θεολογικές εξηγήσεις. Αντί, να αποδίδει τα φυσικά φαινόμενα στους θεούς, **έβρισκε πιο λογικές εξηγήσεις, κάτι το οποίο ήταν όμως, κατακριτέο από τον κόσμο εκείνη την εποχή**. Παράλληλα με τον Θαλή, όμως, υπήρξαν και άλλοι σπουδαίοι φιλόσοφοι, που εξέδωσαν ένα παρόμοιο έργο. Αρχικά, ο Αναξίμανδρος, πίστευε πως το σύμπαν προήλθε από μια αιώνια ουσία που ονομάζεται το απροσδιόριστο. Ύστερα, Ο Αναξίμενης θεώρησε ότι ο αέρας ήταν η βασική ουσία και ότι συμπυκνωνόταν ή γινόταν λιγότερο πυκνός για να σχηματίσει άλλα υλικά, όπως το νερό ή η φωτιά. Γύρω στην ίδια εποχή, σε αυτό που είναι τώρα η νότια Ιταλία, **ο Πυθαγόρας εξηγούσε το σύμπαν με όρους αριθμών**. Δίδαξε ότι όλα τα πράγματα είναι αριθμοί ή, ίσως, μπορούν να μειωθούν σε αριθμούς. Ο Πυθαγόρας πίστευε επίσης ότι όλα είναι αρμονικά συνδεδεμένα. Από την άλλη πλευρά, ο Ηράκλειτος έβλεπε μόνο σύγκρουση στον κόσμο.

Πίστευε ότι όλα αλλάζουν και κινούνται συνεχώς, και ότι τίποτα δεν παραμένει το ίδιο. Ορισμένες προσωκρατικές διδασκαλίες που είχαν κυρίαρχο ρόλο εκείνη την εποχή, ήταν αυτές του Παρμενίδη, οι οποίες ήταν και πάρα πολύ επιδραστικές κατά τον 5ο αιώνα π.Χ. Όμως προκάλεσαν ένα πρόβλημα στους άλλους προσωκρατικούς. Μέχρι τότε, οι φιλόσοφοι είχαν αποδεχτεί την ύπαρξη της αλλαγής, της κίνησης και της πολυπλοκότητας (η πραγματικότητα που αποτελείται από πολλές ουσίες). Ο Παρμενίδης υποστήριξε ότι η αλλαγή, η κίνηση και η πολυπλοκότητα ήταν μη πραγματικές επειδή απαιτούν την ύπαρξη του μη όντος. Ο Παρμενίδης απέρριψε την ιδέα του μη όντος ως αδιανόητη. Είπε ότι **το σύμπαν είναι ομοιόμορφο, αμετάβλητο, χωρίς γέννηση ή καταστροφή**. Ο Παρμενίδης είχε λίγους οπαδούς αλλά μεγάλη επιρροή.

Οι αντίπαλοί του δεν μπορούσαν να αποδείξουν τα συλλογιστικά του σφάλματα, και έτσι προσπάθησαν να συμφιλιώσουν τα συμπεράσματά του με την κοινή λογική. Ο Εμπεδοκλής συμφώνησε ότι δεν μπορούσε να υπάρξει γένεση ή καταστροφή. Εξήγησε την φαινομενική τους ύπαρξη με όρους **τεσσάρων αιώνιων στοιχείων: γη, αέρας, φωτιά και νερό**, αναμεμιγμένα από τη δύναμη της αγάπης και διαχωρισμένα από την έριδα. Ο Αναξαγόρας πίστευε ότι ένας άπειρος αριθμός στοιχείων είχε διαχωριστεί από ένα αρχικό μείγμα μέσω της περιστροφής που ξεκίνησε από μια δύναμη ή υλικό που ονόμαζε Νου. Κάθε είδος φυσικής ουσίας περιέχει όλα τα στοιχεία αλλά σε διαφορετικές αναλογίες.

Ο Αναξαγόρας πίστευε ότι η ύλη είναι άπειρα διαιρετή. Έτσι, στα τέλη του 5ου αιώνα π.Χ., ο Λεύκιππος και ο Δημόκριτος απάντησαν στον Παρμενίδη με μια θεωρία που ονομάζεται ατομισμός. Δίδαξαν ότι το σύμπαν αποτελείται από μικροσκοπικά, στερεά, αδιαίρετα σώματα που ονομάζονται άτομα, τα οποία κινούνται στο διάστημα και συγκεντρώνονται για να σχηματίσουν τα μεγαλύτερα αντικείμενα της κοινής εμπειρίας. Συμπερασματικά, καταλαβαίνουμε πώς η προσωκρατική φιλοσοφία και ο Θαλής ήταν δύο αξιότατα φαινόμενα εκείνης της εποχής. Θα έλεγε κανείς πως **η φιλοσοφία αυτή με πρωταγωνιστή αυτόν τον άνθρωπο, έπλασε τον νου μας, την γνώση μας, την λογική μας**.

Κατσίμπα Τίνα, Χανιώτη Ουρανία

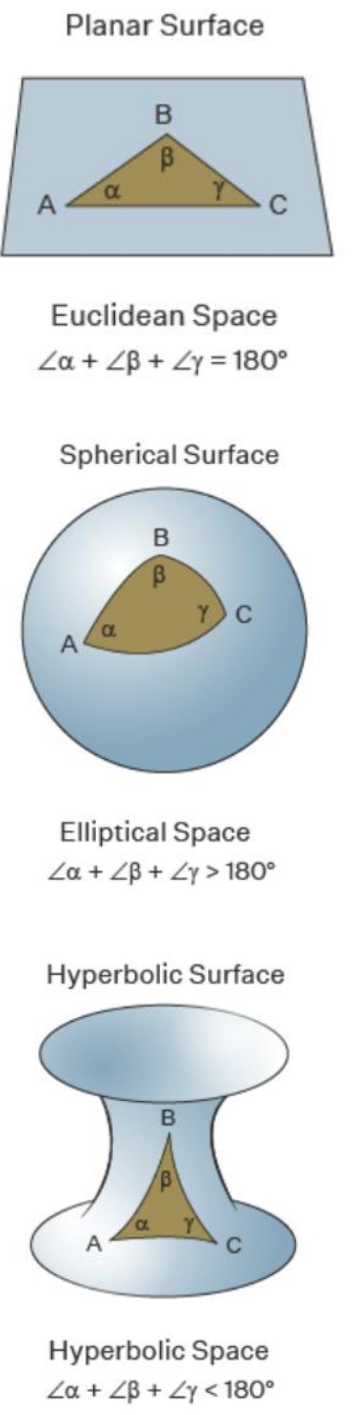
# Μη-Ευκλείδειες Γεωμετρίες

Η **Ευκλείδεια Γεωμετρία** (μηδενική καμπυλότητα) βασίζεται σε 5 αξιώματα, τα οποία είναι τα εξής:

1. Μεταξύ δύο σημείων μπορείς να σχεδιάσεις μια μοναδική ευθεία.
2. Μπορούμε να προεκτείνουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα επ' άπειρον δημιουργώντας μια ευθεία.
3. Μπορούμε να γράψουμε κύκλο με οποιοδήποτε κέντρο και οποιαδήποτε ακτίνα.
4. Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.
5. Από δοθέν σημείο εκτός δοθείσης ευθείας διέρχεται το πολύ μία ευθεία, που δεν τέμνει την δοθείσα.

Διαβάζοντας αυτά τα αξιώματα παρατηρούμε ότι το τελευταίο αξίωμα, γνωστό ως το **«Αξίωμα παραλληλίας»** είναι σε σχέση με τα υπόλοιπα και μεγαλύτερο και πιο σύνθετο. Πολλοί φιλόδοξοι μαθηματικοί της αρχαιότητας προσπάθησαν να το αποδείξουν βασισμένοι στα υπόλοιπα αξιώματα πιστεύοντας ότι ο Ευκλείδης ήταν λανθασμένος στην απόφασή του να το περιλάβει ως ξεχωριστό αξίωμα, αλλά απέτυχαν. Για τους επόμενους αιώνες υπήρχε ελάχιστη πρόοδος στην απόδειξη του 5ου αξιώματος ως θεώρημα των υπολοίπων, οδηγώντας τους Άραβες μαθηματικούς οι οποίοι συνέχιζαν το έργο των αρχαίων Ελλήνων στο συμπέρασμα ότι ο Ευκλείδης πράγματι δεν έκανε λάθος. Το συγκεκριμένο πρόβλημα επανεξετάστηκε τον 18ο και 19ο αιώνα όπου φημισμένοι μαθηματικοί εξερεύνησαν γεωμετρίες **χωρίς το αξίωμα της παραλληλίας** οδηγώντας τους στο να ανακαλύψουν τη λεγόμενη μη-ευκλείδεια γεωμετρία η οποία χωρίζεται σε δύο κύριους τομείς:

- **Σφαιρική ή Ελλειπτική γεωμετρία** (θετική καμπυλότητα)  
Στην ελλειπτική γεωμετρία η έννοια της παραλληλίας εξαφανίζεται μιας και κάθε δύο ευθείες σε έναν ελλειπτικό χώρο τέμνονται εάν τις επεκτείνουμε αρκετά. Για παράδειγμα η επιφάνεια της Γης όπου οι μεσημβρινοί τέμνονται στους πόλους. Εδώ το άθροισμα γωνιών τριγώνου **υπερβαίνει τις 180°**.
- **Υπερβολική γεωμετρία** (αρνητική καμπυλότητα)  
Στον κόσμο της υπερβολικής γεωμετρίας έχοντας μία ευθεία και ένα εξωτερικό της ευθείας σημείο μπορούμε να σχεδιάσουμε άπειρες παράλληλες ευθείες, σε αντίθεση με τη μια παράλληλη της Ευκλείδειας γεωμετρίας. Εδώ φαινομενικά παράλληλες ευθείες δεν κρατάνε σταθερή απόσταση μεταξύ τους αλλά αποκλίνουν και το άθροισμα γωνιών τριγώνου είναι **μικρότερο από 180°**.



Γιαλλούσης Ιωάννης, Μαυρογιώργου Σοφία

# Μαθηματικά: ανακάλυψη ή εφεύρεση;

Η ερώτηση του αν τα μαθηματικά είναι εφεύρεση ή ανακάλυψη αποτελεί ένα θεμελιώδες φιλοσοφικό ζήτημα που συζητείται εδώ και αιώνες. Υπάρχουν δύο βασικές προσεγγίσεις γύρω από αυτή την ερώτηση: η μία θεωρεί τα μαθηματικά ως κάτι που **ανακαλύπτεται στον κόσμο** και η άλλη ως **ανθρώπινη εφεύρεση**. Η διαφορά αυτή επηρεάζει τη θεώρηση του κόσμου και της ανθρώπινης γνώσης και έχει συζητηθεί από σπουδαίους φιλοσόφους, όπως ο Πλάτωνας και ο Αριστοτέλης. Στο παρόν άρθρο, θα εξετάσουμε τις απόψεις τους και θα προσπαθήσουμε να φωτίσουμε τη διαμάχη γύρω από το ζήτημα αυτό.

Ο **Πλάτωνας**, ο μεγάλος φιλόσοφος της Αρχαίας Ελλάδας, ήταν υποστηρικτής της άποψης ότι τα μαθηματικά δεν είναι απλώς ανθρώπινες εφευρέσεις, αλλά **ανακαλύψεις που αποκαλύπτουν μια βαθύτερη, αμετάβλητη αλήθεια** για τον κόσμο. Για τον Πλάτωνα, η πραγματικότητα δεν περιορίζεται μόνο στα υλικά αντικείμενα που αντιλαμβανόμαστε με τις αισθήσεις μας, αλλά υπάρχει μια ανώτερη, μη υλική πραγματικότητα, η οποία **είναι ο κόσμος των Ιδεών**. Σύμφωνα με την πλατωνική φιλοσοφία, τα μαθηματικά δεν εξαρτώνται από την ανθρώπινη σκέψη ή την εμπειρία. Αντίθετα, **οι μαθηματικές έννοιες υπήρχαν από πάντα**, σε μια ιδεατή και αμετάβλητη μορφή, και οι άνθρωποι απλώς τις **ανακαλύπτουν** μέσω του λόγου και της σκέψης τους.

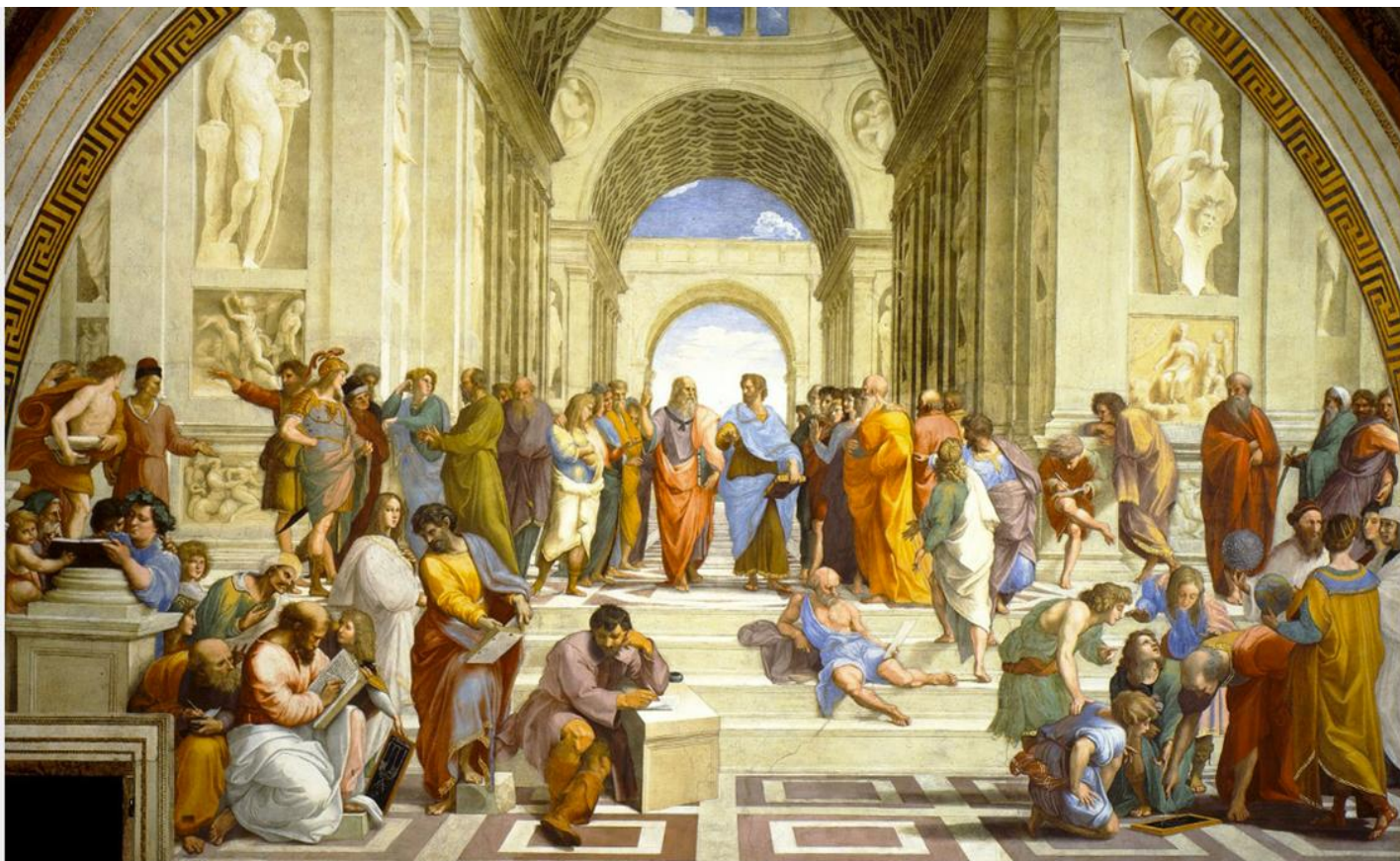
Η αλήθεια των μαθηματικών προτάσεων οφείλεται στο ότι περιγράφουν **αναλλοίωτες** δομικές σχέσεις ενός σύμπαντος αναλλοίωτων αντικειμένων και οι αλήθειες αυτές δεν εξαρτώνται από τη δυνατότητα ή μη, του μαθηματικού να τις συλλάβει. Ο μαθηματικός δεν εφευρίσκει νέες μαθηματικές αλήθειες, αλλά υπάρχουν ανεξάρτητα από αυτόν και αναμένουν υπομονετικά τον εξερευνητή τους. **Όπως ο αστρονόμος ανακαλύπτει για πρώτη φορά ένα άγνωστο άστρο** στρέφοντας το τηλεσκόπιο του προς περιοχές του σύμπαντος μακρινές και μέχρι χθες απρόσιτες.

**Αντίθετα, ο Αριστοτέλης**, μαθητής του Πλάτωνα, είχε μια διαφορετική άποψη για τα μαθηματικά. Για τον Αριστοτέλη, τα μαθηματικά δεν είναι μια ανακάλυψη που αφορά έναν υπερβατικό κόσμο, αλλά είναι **προϊόν εμπειρίας της ανθρώπινης σκέψης**. Ο Αριστοτέλης πίστευε ότι οι έννοιες που χρησιμοποιούμε στα μαθηματικά είναι δημιούργημα του ανθρώπινου νου και δεν αντιστοιχούν σε έναν αντικειμενικό και ανεξάρτητο κόσμο. Ο κόσμος που ζούμε είναι αυτός που αντιλαμβανόμαστε με τις **αισθήσεις** μας, και οι μαθηματικές έννοιες αποτελούν αφαιρέσεις από αυτόν τον κόσμο. Η άποψη του Αριστοτέλη ενισχύεται από την ιδέα του ότι ο άνθρωπος νους είναι αυτός που αναγνωρίζει τα μαθηματικά μέσα από την αλληλεπίδραση με τον φυσικό κόσμο.

Για τον Αριστοτέλη, οι μαθηματικές έννοιες, όπως οι αριθμοί ή οι γεωμετρικές φόρμες, αποτελούν εργαλεία που δημιουργεί η ανθρώπινη σκέψη για να κατανοήσει τη φύση και να εξηγήσει τα φαινόμενα του κόσμου. Επομένως, τα μαθηματικά δεν είναι μια ανακάλυψη κάποιου υπερβατικού κόσμου, αλλά μια **εφεύρεση του ανθρώπινου νου για να κατανοήσει καλύτερα τη φυσική πραγματικότητα**. Η διαμάχη μεταξύ των απόψεων του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη παραμένει άξια συζήτησης. Οι υποστηρικτές της πρώτης άποψης, όπως ο Πλάτωνας, θεωρούν τα μαθηματικά ως **παγκόσμιες αλήθειες που υπάρχουν πέρα από την ανθρώπινη εμπειρία και συνείδηση**. Από την άλλη, οι υποστηρικτές της δεύτερης άποψης, όπως ο Αριστοτέλης, πιστεύουν ότι τα μαθηματικά είναι **κατασκευές** του ανθρώπινου νου, **εργαλεία** που επινοούνται για να κατανοήσουμε τον φυσικό κόσμο.

Αξιοσημείωτο είναι ότι η σημερινή μαθηματική κοινότητα **φαίνεται να αποδέχεται και τις δύο πλευρές της διαμάχης!** Από τη μια, οι μαθηματικοί θεωρούν ότι οι έννοιες και τα θεωρήματα που αναπτύσσουν έχουν αντικειμενική ισχύ και ισχύουν παντού, ακόμα και αν οι άνθρωποι δεν τα ανακαλύψουν. Από την άλλη, η εφαρμογή των μαθηματικών στην περιγραφή και εξήγηση των φυσικών φαινομένων είναι σαφώς μια ανθρώπινη επινόηση, που προσαρμόζεται στις ανάγκες της επιστήμης. Η συζήτηση για το αν τα μαθηματικά είναι εφεύρεση ή ανακάλυψη παραμένει ένα από τα πιο **θεμελιώδη και συναρπαστικά ερωτήματα της φιλοσοφίας**. Ο Πλάτωνας και ο Αριστοτέλης προσφέρουν διαφορετικές προσεγγίσεις σε αυτό το ζήτημα, η καθεμία με τα πλεονεκτήματα και τα όριά της. Στο τέλος, η απάντηση ίσως να εξαρτάται από το πώς αντιλαμβανόμαστε τη φύση των μαθηματικών, ως ανακαλύψεις μιας εξωτερικής υπερβατικής πραγματικότητας ή ως ανθρώπινες εφευρέσεις που αποτυπώνουν τον κόσμο γύρω μας. **Εσείς θεωρείτε τα Μαθηματικά ανακάλυψη ή εφεύρεση;**

Κελαϊδή Αγγελική,  
Παπανδροπούλου Λυδία,  
Πολέμη Μαριάννα,  
Σταμέλου Ναταλία,  
Φραγάκη Μάρω



# Εναλλακτικοί τρόποι να πείτε ... 2025

1. Τέλειο τετράγωνο

$$(20 + 25)^2 = 45^2 = 2025$$

ή και

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9)^2 = 2025$$

και για τους συμβολολάτρες

$$\left( \sum_{v=1}^9 v \right)^2 = 2025$$

2. Άθροισμα διαδοχικών περιττών αριθμών

$$1 + 3 + 5 + \dots + 89 = 2025$$

3. Άθροισμα τετραγώνων

$$5^2 + 20^2 + 40^2 = 2025 \quad \text{ή και} \quad 27^2 + 36^2 = 2025$$

4. Άθροισμα των πρώτων εννέα κύβων

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 9^3 = 2025$$

δηλαδή

$$\sum_{v=1}^9 v^3 = 2025$$

5. Υπολογίστε:

$$2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 - 2^3 + 2^2 - 2^1 - 2^0 =$$

6. Υπολογίστε:

$$(2 - 0 - 2 - 5)^2 \cdot (2 + 0 + 2 + 5)^2 =$$

## Crossword time!

### Οριζόντια

- 3** Η ταχύτερη διαδρομή μεταξύ δύο σημείων Α και Β που βρίσκονται σε διαφορετικά υψόμετρα είναι μια ...  
**6** Τόσα χρώματα χρειάζονται ώστε να χρωματίσουμε έναν χάρτη, έτσι ώστε δύο γειτονικές περιοχές να μην έχουν το ίδιο χρώμα  
**9** Θεωρούσε πως τα Μαθηματικά είναι εφεύρεση  
**11** Το 2025 ισούται με το άθροισμα των πρώτων ... κύβων  
**12** Μνημονεύεται ως «μαθηματικών άξιαν μνήμης κατά παιδείαν»  
**13** Αυξάνονται όταν αλλάξεις πόρτα στο πρόβλημα του Monty Hall  
**14** Η πρώτη σύγχρονη φορητή ... δημιουργήθηκε το 1972 από τον Jack Kilby

### Κάθετα

- 1** Γυναίκα μαθηματικός που γεννήθηκε και έζησε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου  
**2** Αυτός ο αριθμός δεν αναπαρίσταται με λατινικούς αριθμούς  
**4** Το αξίωμα της ... δεν ισχύει σε μη-Ευκλείδειες γεωμετρίες  
**5** Σε αυτή τη γεωμετρία το άθροισμα γωνιών κάθε τριγώνου υπερβαίνει τις 180°  
**7** Το ... του 45 ισούται με 2025  
**8** Το Θεώρημά του έμεινε αναπόδεικτο για περίπου 400 χρόνια  
**10** Οι επενδυτές χρησιμοποιούν έναν συντελεστή ... για να αξιολογήσουν πόσο στενά κινούνται οι δείκτες ζευγών  
**11** Ο Goldbach διατύπωσε την ... ότι κάθε άρτιος φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 2 εκφράζεται ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών



Συντακτική ομάδα: Μαθηματική Σκέψη Γ' Γυμνασίου

Ιδιαίτερες ευχαριστίες στην Λουΐζα Κωστή για τη συμμετοχή της στην οργάνωση και σχεδίαση του εντύπου.

Επιμέλεια εντύπου: Κούτσικος Συμεών, Μαντέλλος Δημήτρης