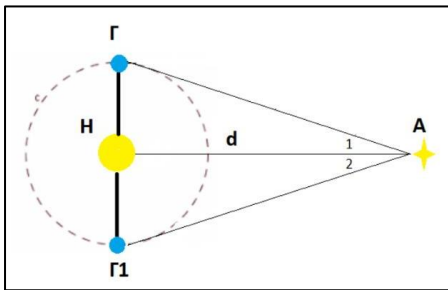


Μαθηματικά και Αστρονομία

Τα Μαθηματικά και η Αστρονομία είχαν πάντοτε στενή σχέση. Από τη μία πλευρά, η επιστήμη της Αστρονομίας στηρίζει τις αστρονομικές της εργασίες πάνω σε μαθηματικές γνώσεις, οι οποίες είναι απαραίτητες για την απόδειξη της ορθότητάς τους. Από την άλλη, οι μαθηματικοί προσπαθούν να επιλύσουν αστρονομικά ζητήματα εφαρμόζοντας και διευρύνοντας τις γνώσεις που έχουν πάνω στην τριγωνομετρία και τη σφαιρική γεωμετρία.

Ένα από τα αστρονομικά ζητήματα ήταν ο υπολογισμός της απόστασης κοντινών αστερών (Friedrich Bessel, 1838).

Η διαδικασία είναι η εξής: Υποθέτουμε πως η τροχιά της Γης είναι κυκλική (σχήμα).



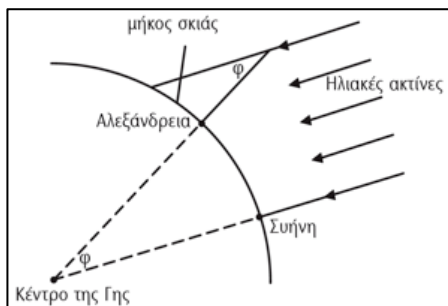
Σχηματίζουμε ένα τρίγωνο με κορυφές το σημείο Γ, στο οποίο βρίσκεται η Γη σήμερα, το σημείο Γ₁, στο οποίο θα βρίσκεται μετά από 6 μήνες και το σημείο Α, στο οποίο βρίσκεται το άστρο. Ως δεδομένα έχουμε την απόσταση Γης-Ήλιου, η οποία παραμένει σταθερή (ΓΗ=ΓΗ₁) και την γωνία Α στην κορυφή του τριγώνου που υπολογίζεται με ειδικά σχεδιασμένα όργανα. Το τρίγωνο ΑΓΓ₁ είναι ισοσκελές (ΑΓ=ΑΓ₁), το ευθύγραμμο τμήμα ΑΗ είναι διχοτόμος της γωνίας Α και ύψος του τριγώνου. Έτσι, έχουμε δύο ορθογώνια τρίγωνα με γνωστή μία οξεία γωνία ($\hat{A}_1 = \hat{A}_2$) και μία από τις κάθετες πλευρές τους ($H\Gamma = H\Gamma_1 = \frac{r_1}{2}$).

Χρησιμοποιώντας τριγωνομετρία έχουμε ότι:

$$\eta\mu A_1 = \frac{GH}{AG} \text{ ή } AG = \frac{GH}{\eta\mu A_1}$$

Βέβαια, η ανθρωπότητα πριν φτάσει στον υπολογισμό μεγάλων αποστάσεων, όπως αυτός των αστεριών, στη μελέτη άλλων γαλαξιών και ηλιακών συστημάτων, έπρεπε να περάσει από πολύ βασικότερα στάδια, όπως η μελέτη του δικού μας πλανήτη. Πάνω από 2000 χρόνια πριν, έζησε ο Ερατοσθένης (276-194π.Χ) ένας Έλληνας μαθηματικός, γεωγράφος, αστρονόμος, μουσικός και ποιητής. Διετέλεσε, επίσης, διευθυντής της βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας. Ο Ερατοσθένης γνώριζε ότι στη Σύνη, μια πόλη νότια της Αλεξάνδρειας, στις 21 Ιουνίου το

μεσημέρι οι ακτίνες έπεφταν κάθετα στην επιφάνεια της Γης, με αποτέλεσμα την πλήρη απουσία σκιών. Ο Ερατοσθένης αναρωτήθηκε αν το ίδιο ίσχυε για την Αλεξάνδρεια, η οποία βρίσκεται στον ίδιο μεσημβρινό με τη Σύνη. Για να το μάθει αυτό, τοποθέτησε μια ράβδο κάθετα και διαπίστωσε πως στο έδαφος σχηματίστηκε η σκιά της ράβδου. Έτσι, μέτρησε τη γωνία μεταξύ της ράβδου και των



ηλιακών ακτίνων ($\varphi = 7,2^\circ$). Οι ηλιακές ακτίνες φτάνουν στη γη σχεδόν παράλληλες άρα η επίκεντρη γωνία που βαίνει στο τόξο Αλεξάνδρεια - Σύνη αντιστοιχεί στο 1/50 της περιφέρειας της Γης ($360/7,2=50$). Η απόσταση Αλεξάνδρεια - Σύνη είχε υπολογιστεί, από βαδιστές βήμα-βήμα, ίση με 5040 στάδια. Συνεπώς, η περιφέρεια της Γης θα είναι $50 \cdot 5040 = 252000$ στάδια. Το γεγονός μάλιστα, ότι σε δύο διαφορετικά σημεία του πλανήτη, την ίδια μέρα και ώρα οι ακτίνες του ηλίου πέφτουν με διαφορετική γωνία, επιβεβαιώνει το γεγονός πως η Γη δεν μπορεί να είναι επίπεδη.



Πίνακας 1 Universum - Hugo Heikenwaelder

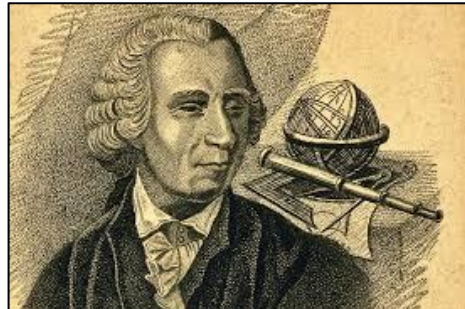
Οι άνθρωποι πάντοτε γοητεύονταν από τα άστρα και τους πλανήτες, προσπαθώντας να βρουν τρόπους να τα παρατηρήσουν, να τα κατανοήσουν και να τα περιγράψουν. Τα Μαθηματικά πάντα έδιναν και θα δίνουν τη δυνατότητα στον άνθρωπο να κατανοήσει αυτό που μέχρι εκείνη τη στιγμή δεν γνωρίζει ή υποθέτει.

Καραγιάννη Ε., Λέων Ι., Μακρή Δ.

Προσωπικότητες: Leonhard Euler

Ο Λέοναρτ Όιλερ (Leonhard Euler) ήταν Ελβετός μαθηματικός, φυσικός, αστρονόμος, γεωγράφος και μηχανικός που έκανε σημαντικές ανακαλύψεις σε πολλούς τομείς των Μαθηματικών.

Γεννήθηκε στις 15 Απριλίου 1707, στη Βασιλεία της Ελβετίας, από τον πάστορα Paul III Euler και την Marguerite née Brucker. Η επίσημη εκπαίδευση του Όιλερ ξεκίνησε στη Βασιλεία, όπου στάλθηκε για να ζήσει με τη γιαγιά του. Το 1720, σε ηλικία δεκατριών ετών, εγγράφηκε στο Πανεπιστήμιο της Βασιλείας.



Ο Όιλερ έφτασε στην Αγία Πετρούπολη στις 17 Μαΐου 1727. Προήχθη από θέση, που κατείχε στο ιατρικό τμήμα της Ακαδημίας σε θέση στο τμήμα Μαθηματικών.

Ανησυχώντας για τη συνεχιζόμενη αναταραχή στη Ρωσία, ο Όιλερ

φυσικός αριθμός n τείνει στο άπειρο. Ο αριθμός e είναι περίπου ίσος με 2,718281828... . Επίσης εισήγαγε το ελληνικό γράμμα Σ για τα αθροίσματα και το γράμμα i για να υποδηλώσει τον φανταστικό αριθμό για τον οποίο ισχύει $i^2 = -1$. Τέλος, διέδωσε τη χρήση του ελληνικού γράμματος π , που υποδηλώνει τον σταθερό λόγο του μήκους ενός κύκλου προς τη διάμετρό του, όπως είχε αποδείξει ο Αρχιμήδης.

Η ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού ήταν στην πρώτη γραμμή της μαθηματικής έρευνας του 18ου αιώνα. Η μελέτη των Μαθηματικών έγινε το επίκεντρο του έργου του Όιλερ. Στον κλάδο της Μιγαδικής Ανάλυσης καθιέρωσε τον τύπο που καθορίζει τη θεμελιώδη σχέση μεταξύ των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και της εκθετικής συνάρτησης: $e^{ix} = \sin x + i \cdot \eta\mu x$.

«Η λογική είναι το θεμέλιο για
κάθε τι που γνωρίζουμε»

-Euler-

έφυγε από την Αγία Πετρούπολη στις 19 Ιουνίου 1741. Έζησε για 25 χρόνια στο Βερολίνο, όπου έγραψε πάνω από 380 άρθρα. Στο Βερολίνο, δημοσίευσε τα δύο έργα για τα οποία θα γινόταν γνωστός: το "Introduction in analysin infinitorum", ένα κείμενο για τη μελέτη των συναρτήσεων, που δημοσιεύθηκε το 1748 και το "Institutiones calculi differentialis", που δημοσιεύθηκε το 1755 με αναφορά στον διαφορικό λογισμό.

Το 1738, έχασε σχεδόν την όρασή του στο δεξί μάτι. Σχολίασε την απώλεια της όρασης του ως εξής: "Τώρα θα έχω λιγότερους περισπασμούς". Ήταν 59 ετών. Στις 18 Σεπτεμβρίου του 1783, ο Όιλερ κατέρρευσε από εγκεφαλική αιμορραγία. Πέθανε λίγες ώρες αργότερα.

Ο Όιλερ εισήγαγε και διέδωσε αρκετούς συμβατικούς συμβολισμούς μέσα από τις πολυάριθμες και ευρείας κυκλοφορίας πραγματείες του. Συγκεκριμένα, εισήγαγε έναν ορισμό για την έννοια της συνάρτησης, και ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε τον συμβολισμό $f(x)$ για αυτές. Εισήγαγε, επίσης, τη σύγχρονη σημειογραφία της Τριγωνομετρίας, το γράμμα e για τον άρρητο αριθμό, που προκύπτει ως το όριο της ακολουθίας $(1 + \frac{1}{n})^n$ όταν ο

Ο Όιλερ εισήγαγε τη χρήση της εκθετικής συνάρτησης και των λογαρίθμων σε αναλυτικές αποδείξεις, ανακάλυψε τρόπους για να εκφράσει τις διάφορες λογαριθμικές συναρτήσεις με δυναμοσειρές, και όρισε με επιτυχία τους λογάριθμους των αρνητικών και των μιγαδικών αριθμών, διευρύνοντας έτσι σημαντικά το πεδίο των μαθηματικών εφαρμογών των λογαρίθμων.

Γιάννης Παχυδάκης

Μη Ευκλείδειες γεωμετρίες: Σφαιρική Γεωμετρία

Στο παρόν άρθρο θα επιχειρήσουμε να παρουσιάσουμε την γεωμετρία, η οποία εφαρμόζεται στην επιφάνεια μίας σφαίρας. Στην προσπάθεια αυτή, θα πρέπει να κατανοήσουμε με διαφορετικό τρόπο βασικές γεωμετρικές έννοιες που γνωρίζουμε στην Ευκλείδεια γεωμετρία. Η γεωμετρία στην οποία θα αναφερθούμε, ονομάζεται σφαιρική γεωμετρία και είναι μια ειδική περίπτωση της Ελλειπτικής Γεωμετρίας του Riemann.

Οι πιο ριζοσπαστικές αντιλήψεις για την Γεωμετρία και τον χώρο οφείλονται στον Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 -1866), που φαντάστηκε έναν χώρο καμπυλωμένο ο οποίος μόνο

τοπικά είναι ευκλείδειος. Μπόρεσε να ξεφύγει από τα στενά πλαίσια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και να δημιουργήσει μια άλλη Γεωμετρία, την Ελλειπτική, εξίσου αληθινή. Οι θέσεις του ήταν τόσο πρωτοποριακές που μπόρεσαν μετά από 60 χρόνια να αποδειχθούν πόσο θεμελιώδεις είναι για την ίδια την φύση και την δομή του σύμπαντος μέσα από τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας του Αϊνστάιν.

Υποστηρίζεται πως η πρώτη συστηματική δουλεία για την σφαιρική γεωμετρία έγινε από τον Θεοδόσιο τον Τριπολίτη, ο οποίος συγκέντρωσε σε τρία βιβλία τις προϋπάρχουσες αστρονομικές γνώσεις και προτάσεις, που είχαν προέλθει από την εξοικείωση των Ελλήνων με την Βαβυλωνιακή Αστρονομία μέχρι και τον 4^ο αι. π.Χ. Η αντίληψη ότι ο χώρος επεκτείνεται ευθύγραμμα, απεριόριστα και ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις, βρίσκεται στο υπόβαθρο της Ευκλείδειας γεωμετρίας, σε βαθμό που αιώνες μετά ο Γερμανός φιλόσοφος Ιμμάνουελ Καντ υποστήριξε πως ο χώρος είναι εκ των προτέρων Ευκλείδειος. Καταλαβαίνουμε, λοιπόν, πως η προσπάθεια μίας άλλης γεωμετρίας που πηγάζει από την αστρονομική παρατήρηση του ουράνιου θόλου ή από την απόδειξη του Ερατοσθένη πως η Γη δεν είναι επίπεδη, έρχεται σε ρήξη με αλήθειες που πηγάζουν από την γεωμετρία όπως την αντιλαμβανόμαστε στον περιβάλλοντα χώρο. Επίσης, οι ανάγκες για μακρινά ταξίδια, ιδιαίτερα στη θάλασσα κατά την εποχή των μεγάλων γεωγραφικών ανακαλύψεων, τον 15ο αιώνα μ.Χ., συνέβαλλαν σε μεγάλο βαθμό στην εξέλιξη της χαρτογραφίας και έτσι στην περαιτέρω ανάπτυξη της σφαιρικής γεωμετρίας. Στην συνέχεια, η σφαιρική γεωμετρία χρησιμοποιείται για τις ανάγκες της ναυσιπλοΐας σε συνδυασμό, με τις εφαρμογές της χαρτογραφίας και της αστρονομίας. Επιπρόσθετα, οι αρχές της σφαιρικής γεωμετρίας χρησιμοποιούνται και στην αεροπλοΐα. Τέλος, στις αρχές του 20^{ου} αιώνα για να διατυπώσει τη θεωρία της Σχετικότητας, ο Albert Einstein βασίστηκε στη σφαιρική γεωμετρία, ο οποίος φαντάστηκε έναν χώρο καμπυλωμένο. Με αυθαίρετη διάσταση που μόνο τοπικά ήταν Ευκλείδειος.

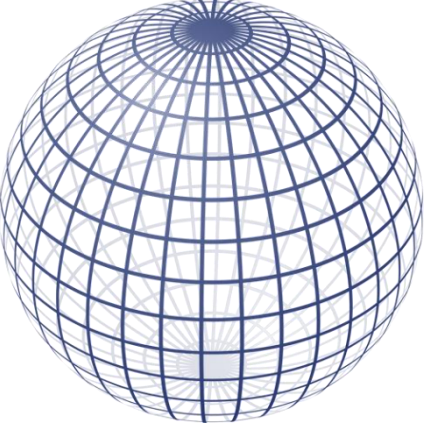
Διαφορές Σφαιρικής και Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Η Ευκλείδεια γεωμετρία εφαρμόζεται στο επίπεδο, το οποίο είναι μία επιφάνεια άπειρη και απεριόριστη, δηλαδή χωρίς όρια. Αντιστοίχως, η σφαιρική γεωμετρία υλοποιείται στην επιφάνεια της σφαίρας, μία επιφάνεια που είναι πεπερασμένη αλλά δεν έχει όρια. Η έννοια του σημείου είναι ίδια και στις δύο Γεωμετρίες. Ωστόσο, η έννοια της ευθείας διαφέρει. Στην Ευκλείδεια γεωμετρία, το ευθύγραμμο τμήμα

είναι η συντομότερη διαδρομή μεταξύ δύο σημείων και η ευθεία, η άπειρη προέκταση του ευθυγράμμου τμήματος από τα δύο του άκρα. Στην σφαιρική γεωμετρία, η ευθεία είναι ένας μέγιστος κύκλος ο οποίος δεν επεκτείνεται απεριόριστα, αλλά δεν έχει όρια. Η ευθεία στην σφαιρική γεωμετρία, δηλαδή ο μέγιστος κύκλος, χωρίζει τη σφαίρα σε δύο ημισφαίρια.

Ισχύουν τα αξιώματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην Σφαιρική Γεωμετρία;

1^ο αξίωμα: Στην Ευκλείδεια γεωμετρία, από δύο σημεία διέρχεται μία και μοναδική ευθεία. Στην σφαιρική γεωμετρία, ισχύει ακριβώς το ίδιο, εκτός αν αυτά τα δύο σημεία βρίσκονται στους “πόλους” της σφαίρας που τότε διέρχονται άπειρες ευθείες.



2^ο αξίωμα: Στην Ευκλείδεια γεωμετρία, κάθε ευθύγραμμο τμήμα προεκτείνεται και από τα δύο άκρα του απεριόριστα. Στην σφαιρική γεωμετρία μπορεί να προεκταθεί μέχρι να γίνει μέγιστος κύκλος.

3^ο αξίωμα: Στην Ευκλείδεια γεωμετρία, με κάθε κέντρο και κάθε ακτίνα μπορεί να γραφεί κύκλος. Στην σφαιρική, αυτό ισχύει μόνο όταν η ακτίνα είναι μικρότερη του μισού του μέγιστου κύκλου.

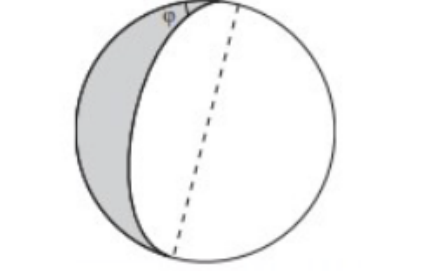
4^ο αξίωμα: Και οι δύο γεωμετρίες συμφωνούν ότι οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.

5^ο αξίωμα: Στην Ευκλείδεια γεωμετρία, από ένα σημείο εκτός ευθείας μπορείς να φέρεις μόνο μια παράλληλη προς αυτήν. Στην σφαιρική, δεν υπάρχουν παράλληλες ευθείες.

Άλλες διαφορές:

1. Η περίμετρος του κύκλου στο επίπεδο είναι ίση με 2πr, όπου r η ακτίνα του κύκλου. Στην επιφάνεια της σφαίρας, η περίμετρος ενός κύκλου είναι μικρότερη από 2πr, όπου η ακτίνα r είναι τόξο και όχι ευθύγραμμο τμήμα.

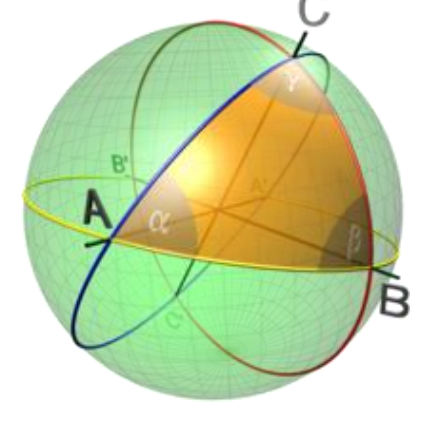
2. Στην σφαιρική γεωμετρία, η άτρακτος είναι ένα καμπυλόγραμμο σχήμα που



χρειάζεται μόνο δύο γραμμές για να δημιουργηθεί. Στην Ευκλείδεια γεωμετρία, χρειάζονται τουλάχιστον 3 γραμμές για να δημιουργηθούν κλειστά σχήματα.

3. Στην σφαιρική γεωμετρία, το άθροισμα των γωνιών του σφαιρικού τριγώνου είναι μεγαλύτερο από 180^ο.

Αν πάρουμε δύο μέγιστους τεμνόμενους κύκλους, όπως οι μεσημβρινοί της γης, που τέμνονται στους πόλους και οι οποίοι με τη σειρά τους τέμνουν κάθετα τον Ισημερινό, τότε σχηματίζουν σφαιρικό τρίγωνο με δύο ορθές γωνίες.



Αυτό αποδείχθη με το θεώρημα του Albert Girard (Γάλλος μαθηματικός και μουσικός του 17^{ου} αιώνα), ο οποίος βρήκε τον τύπο υπολογισμού του εμβαδού του σφαιρικού τριγώνου σε σχέση με τις γωνίες του.

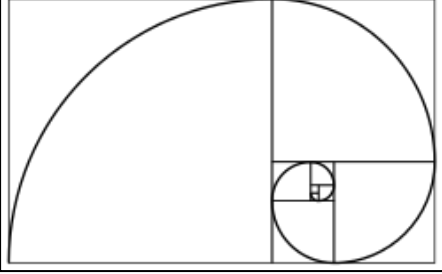
Χατζηγάκης Χ.

Χρυσή Τομή & Ακολουθία Φιμπονάτσι

Ο Ιταλός μαθηματικός Φιμπονάτσι αναγνωρίζεται σήμερα ως ένας από τους σημαντικότερους του Μεσαίωνα. Γεννήθηκε το 1170 μ.Χ. και πέθανε το 1240 μ.Χ.. Δημιούργησε την περίφημη ακολουθία Φιμπονάτσι και εισήγαγε στην Ευρώπη το αραβικό δεκαδικό σύστημα αρίθμησης. Η ομώνυμη ακολουθία είναι μια σειρά αριθμών με αρχή 0,1,... Κάθε επόμενος αριθμός ισούται με το άθροισμα των δύο προηγούμενων:

0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,...

Αν ξεκινήσουμε να κατασκευάζουμε **χρυσά τετράγωνα** με πλευρές τους όρους της ακολουθίας Φιμπονάτσι και ενώσουμε στο τέλος τις κορυφές των τετραγώνων, θα προκύψει η λεγόμενη Χρυσή σπείρα.



Οι αριθμοί Φιμπονάτσι απαντώνται συχνά σε πολλούς τομείς των Μαθηματικών και άλλων επιστημών αλλά επίσης εμφανίζονται με εκπληκτικό τρόπο και στην φύση, αποτελούν κατά κάποιον τρόπο το αριθμητικό της σύστημα. Παρατηρείται στη

διάταξη των φύλλων ενός φυτού, στο μοτίβο των πετάλων ενός λουλουδιού, σε ένα κουκουνάρι αλλά και στον φλοιό ενός ανανά.

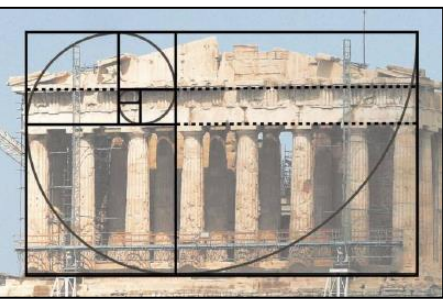
Ένα ακόμα παράδειγμα είναι το ανθρώπινο χέρι. Κάθε άνθρωπος έχει 2 χέρια, κάθε ένα από τα οποία έχει 5 δάκτυλα και κάθε δάκτυλο αποτελείται από 3 τμήματα που χωρίζονται από 2 αρθρώσεις. Οι αριθμοί αυτοί ανήκουν στην ακολουθία Φιμπονάτσι.

Η Γη με την Αφροδίτη διαγράφουν κάθε 8 χρόνια μια πεντάφυλλη ροζέτα. Όμως, 8 χρόνια της γης είναι 13 της Αφροδίτης, μιας και βρίσκεται πιο κοντά στον ήλιο. Πάλι, υπάρχουν διαδοχικοί αριθμοί Φιμπονάτσι.

Ο λόγος καθενός από τους όρους της ακολουθίας Φιμπονάτσι με τον προηγούμενο του τείνει στον αριθμό 1,618033989... . Μία μέθοδος για την εύρεση της τιμής του λόγου φ είναι η επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης: $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$.

Μία από τις λύσεις της εξίσωσης είναι η $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618033989$.

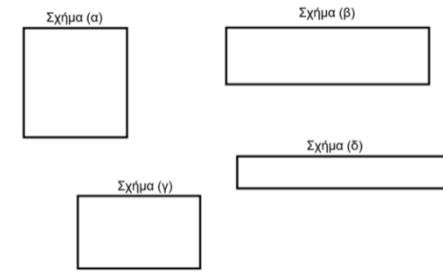
Στον Παρθενώνα, υποστηρίζεται πως πολλές από τις αναλογίες του εμφανίζουν την Χρυσή αναλογία.



Ακόμα, υπάρχουν έρευνες που δείχνουν πως οι άνθρωποι έχουν μια έμφυτη τάση να προτιμούν αυτούς τους αριθμούς καθώς και σχήματα που είναι κατασκευασμένα με την Χρυσή αναλογία.

Παρακάτω παρουσιάζονται τα αποτελέσματα σχετικής έρευνας που διεξήχθη μεταξύ των μαθητών του Γυμνασίου του Κολλεγίου Αθηνών. Φάνηκε πως το 41% των μαθητών προτίμησε το Σχήμα (γ) το οποίο ήταν κατασκευασμένο ώστε οι πλευρές του να έχουν λόγο περίπου ίσο με την χρυσή τομή.

Αλέξανδρος Βουρεξάκης, Αχιλλέας Κουκάς, Έλια Μίχα, Φωτεινή Πάντου



Σχήμα (α) : 22%	Σχήμα (β) : 28%
Σχήμα (γ) : 41%	Σχήμα (δ) : 9%